E pluribus unum? Matematica della diversità

Marco LiCalzi

Dipartimento di Management
Università Ca' Foscari Venezia

Matematica, Cultura e Società 2011
8 giugno 2011

Spieghiamo il titolo

E pluribus unum è il motto non ufficiale degli Stati Uniti d'America, che compare sul retro delle sue monete e sul Gran Sigillo.

Per i curiosi:
il motto ufficiale degli USA è *In God we trust*;
il motto ufficiale dell'UE è *In varietate concordia*.

E pluribus unum

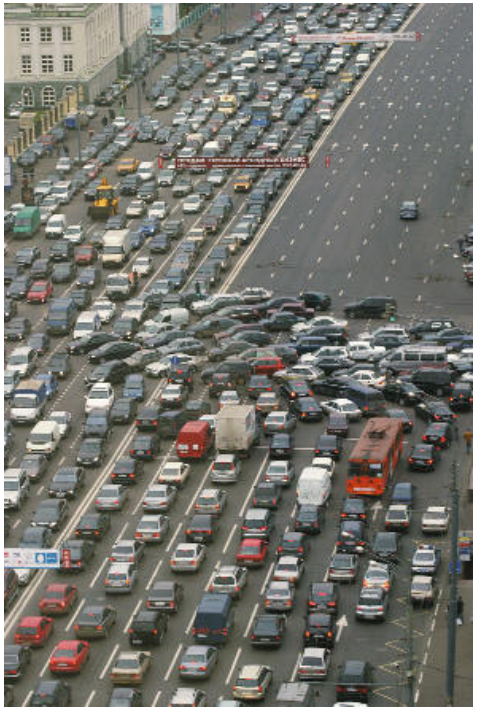
Nel 1978 Schelling (Nobel per l'Economia nel 2005) pubblicò un libro dal titolo *Micromotives and Macrobehavior* che potremmo tradurre con

Microintenzioni e macrocomportamento

Ad esempio, considerate un insieme di automobilisti in azione.

Di norma, le cose vanno ragionevolmente lisce per il sistema.

Talvolta, però, il macrocomportamento è terribilmente diverso dalle microintenzioni degli agenti.



Vorrei raccontarvi alcune situazioni dove l'interazione di agenti ragionevoli fa emergere un macro-comportamento inatteso.

Un semplice esempio

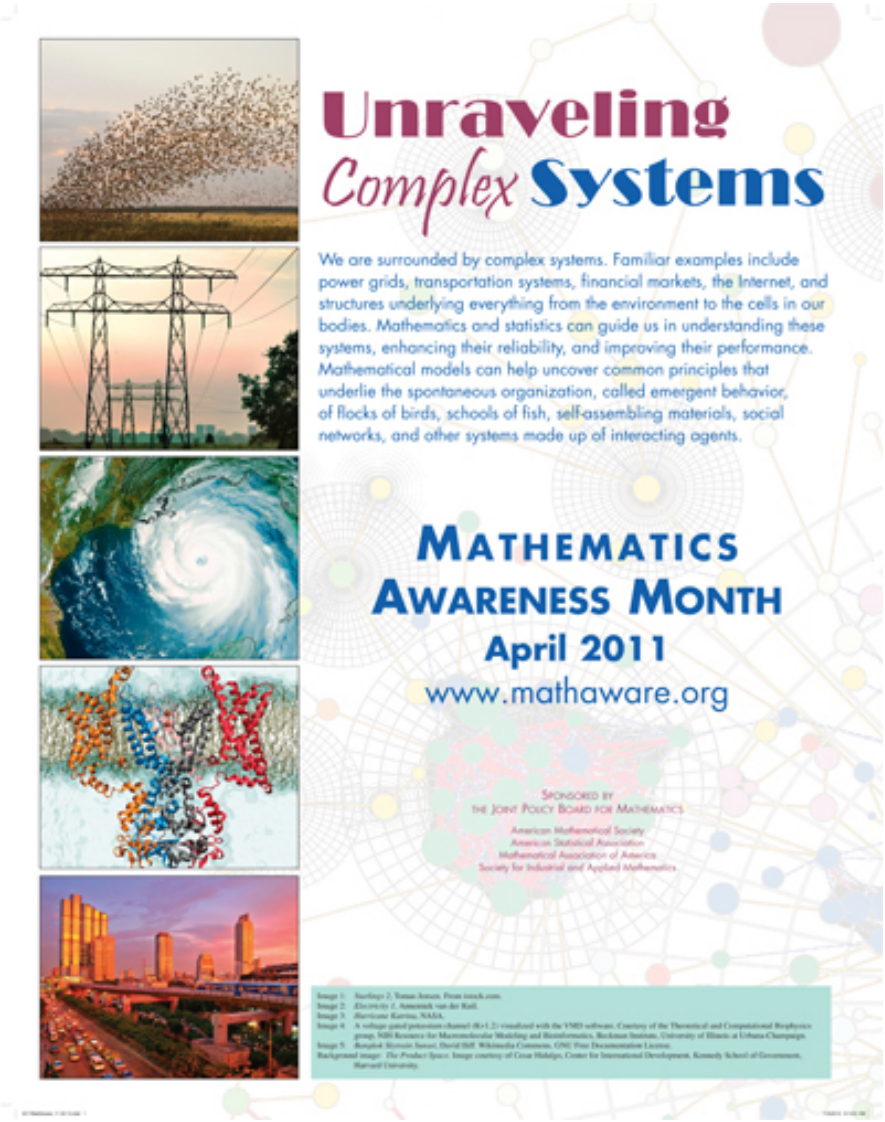
1) Ogni agente è minacciato da un aggressore e protetto da un difensore:
si muove cercando di frapporre il difensore fra sé e l'aggressore.

2) Ogni agente è il difensore di una vittima minacciata da un aggressore:
si muove cercando di frapporsi fra la vittima e l'aggressore.

Chiudete gli agenti in una stanza. Che cosa vi aspettate succeda?

`http://www.icosystem.com/demos/thegame.htm`

Mathematical Awareness Month



I modelli matematici possono aiutarci a scoprire i principi sottostanti all'auto-organizzazione, detta *comportamento emergente*, negli stormi di uccelli, nei banchi di pesci, nei materiali auto-assemblanti, nelle reti sociali, ed in altri sistemi composti da entità interagenti.

Per informazioni:
`www.mathaware.org`

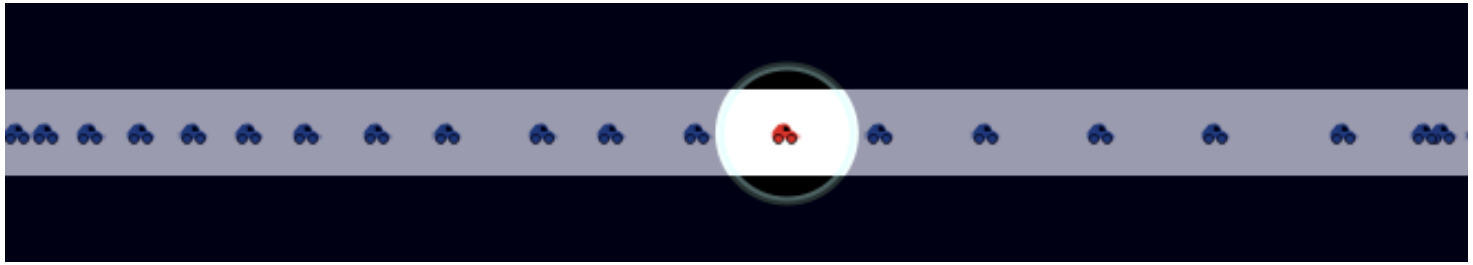
Code in autostrada

Perché si formano le code in autostrada? Ci sono motivi ovvi.

1) Troppe macchine rispetto alla capacità delle strade.

E ci sono motivi meno ovvi.

2) Guardate cosa succede se qualcuno rallenta...

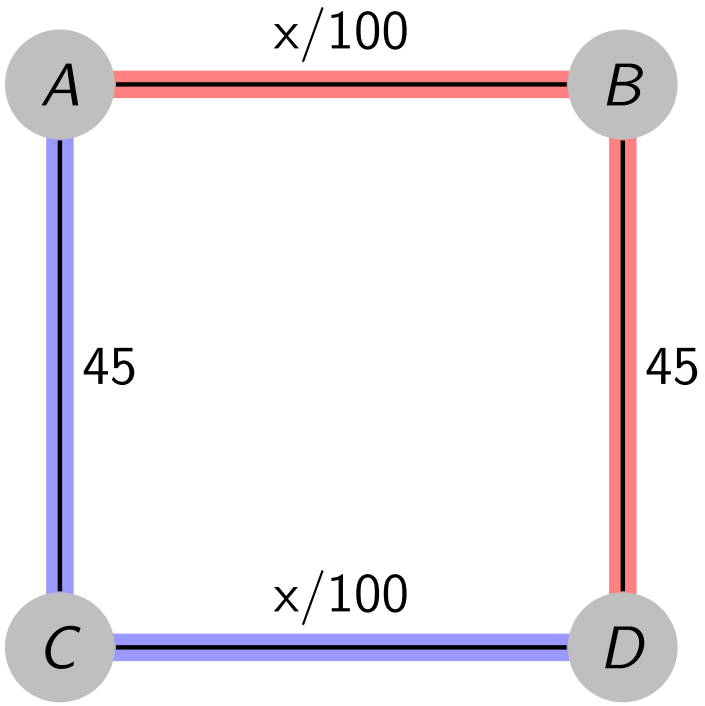


Per vedere di più: `http://www.traffic-simulation.de/`.

Una semplice rete stradale

Ci sono 4000 auto che devono andare da A a D, scegliendo fra due percorsi: via B o via C.

Rappresentiamo la rete stradale con un semplice grafo.



Sugli archi leggete il tempo di attraversamento, che dipende dal numero x di auto circolanti in quel tratto.

Come si distribuisce il traffico?

Ci sono due percorsi:

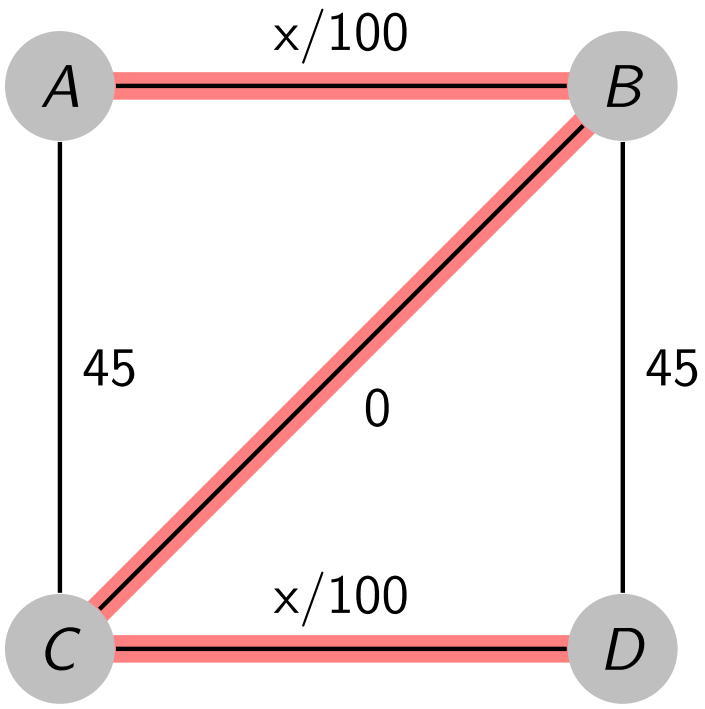
1) via B (A-B-D); 2) via C (A-C-D).

Traffico sul tragitto		Tempo di percorrenza	
via B	via C	via B	via C
0	4000	45	85
1000	3000	55	75
2000	2000	65	65
3000	1000	75	55
4000	0	85	0

Il traffico si distribuisce in parti uguali fra i due percorsi.

Apriamo una nuova strada

Supponiamo di aprire una nuova strada superveloce da B a C.



Adesso ci sono tre percorsi:
1) via B (A-B-D); 2) via C (A-C-D); 3) via BC (A-B-C-D).

Confrontiamo i tempi fra i tre percorsi:
1) via B (A-B-D); 2) via C (A-C-D); 3) via BC (A-B-C-D).

Traffico sul tragitto			Tempo di percorrenza	
via B	via C	via BC	via B o C	via BC
0	0	4000	85	80
500	500	3000	80	70
1000	1000	2000	75	60
1500	1500	1000	70	50
2000	2000	0	65	40

Prima (senza superstrada): 2000 via B, 2000 via C

tempo di percorrenza = 65.

Dopo (con superstrada): 4000 via BC

tempo di percorrenza = 80.

Senza la superstrada starebbero tutti meglio!

Il paradosso di Braess (1968)

Aprire nuove strade senza aggiornare le infrastrutture può essere dannoso.

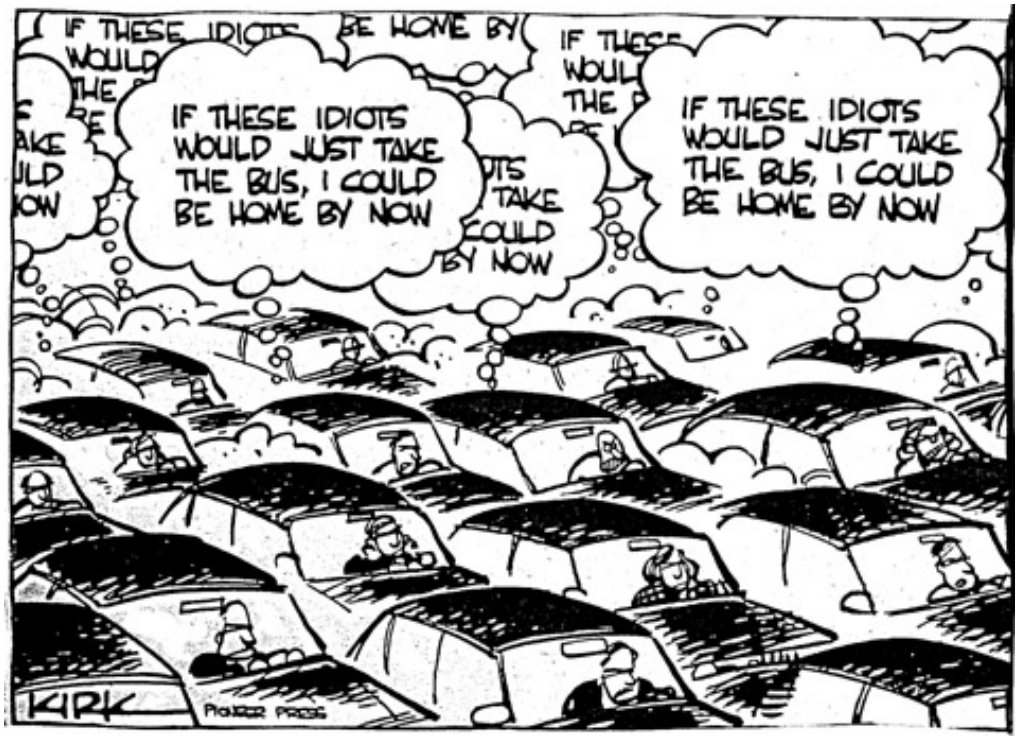
> ## What if They Closed 42d Street and Nobody Noticed?
>
> By GINA KOLATA
> Published: December 25, 1990
>
> ON Earth Day this year, New York City's Transportation Commissioner decided to close 42d Street, which as every New Yorker knows is always congested. "Many predicted it would be doomsday," said the Commissioner, Lucius J. Riccio. "You didn't need to be a rocket scientist or have a sophisticated computer queuing model to see that this could have been a major problem."
>
> But to everyone's surprise, Earth Day generated no historic traffic jam. Traffic flow actually improved when 42d Street was closed.

New York Times, 25 dicembre 1990

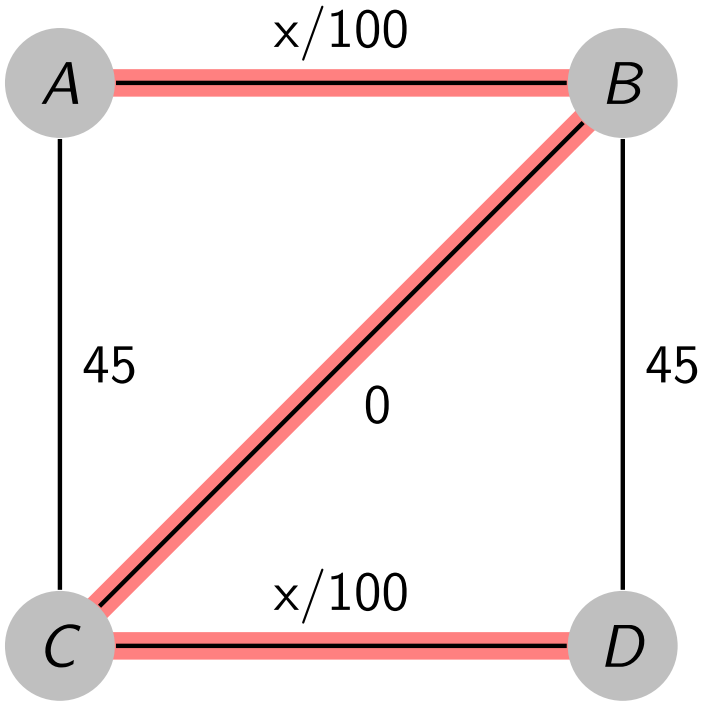
Curiosità: se i tempi di attraversamento sono funzioni lineari del numero di auto, il tempo di percorrenza aumenta al più del 33%.

Effetti collaterali

Una causa importante di macro-comportamenti inattesi sono gli *effetti collaterali* delle azioni individuali.
(Gli economisti parlano di *esternalità*.)



Torniamo alla superstrada.



Prima (senza superstrada): 2000 via B, 2000 via C

tempo di percorrenza = 65.

Dopo (con superstrada): 4000 via BC

tempo di percorrenza = 80.

In coda alla sciovia

Siete in coda davanti allo sciovia. Ci vogliono un minuto per prendere posto, dieci per salire in cima e cinque per scendere. Ci sono venti sciatori in tutto.

Qualcuno brontola: "Siamo sempre in coda: basterebbe comprare un motore nuovo e far salire i ganci più velocemente."

E' davvero una buona idea?

Proviamo a dimezzare il tempo di risalita.

Le attività degli sciatori sono 4: discesa, coda, ingresso, risalita. (Tralasciamo le pause in baita per semplicità.)

	discesa	coda	ingresso	risalita
prima	5	x	1	10
dopo	5	y	1	5

Ci vogliono un minuto per prendere posto, dieci per salire in cima e cinque per scendere. Ci sono venti sciatori in tutto.

	discesa	coda	ingresso	risalita
prima	5	x	1	10
dopo	5	y	1	5

Ogni sciatore deve salire sulla sciovia: quindi servono venti minuti per far salire tutti.

	discesa	coda	ingresso	risalita
prima	5	$x = 4$	1	10
dopo	5	$y = 9$	1	5

Quando le cabine sono più veloci, le code sono più lunghe!
(Purché il numero degli sciatori sia superiore a 11.)

Due famiglie ed un matrimonio

Le nozze sono la cerimonia con cui si formalizza il matrimonio. (Per comodità, pensiamo al rito tradizionale.)

Mentre gli sposi si *uniscono* in matrimonio davanti all'altare, alle loro spalle le famiglie siedono *separate*.

Dopo la cerimonia, se il ricevimento si tiene in piedi, le persone vanno e vengono liberamente, formando occasionali capannelli.

Tuttavia, risulta estremamente difficile amalgamare le due famiglie. Perché?

Due famiglie ed un matrimonio

Ci sono due tipi di ospiti: X e O.

(La famiglia di “lui” e la famiglia di “lei”.)

Ogni ospite resta dove si trova se almeno tre dei suoi otto vicini sono dello stesso tipo, altrimenti si sposta.

(Una persona preferisce stare in un gruppo dove conosce già qualcuno.)

X_1	X_2				
X_3	O_1		O_2		
X_4	X_5	O_3	O_4	O_5	
X_6	O_6			X_7	X_8
	O_7	O_8	X_9	X_{10}	X_{11}
		O_9	O_{10}	O_{11}	

X_3	X_6	O_1	O_2		
X_4	X_5	O_3	O_4		
	O_6	X_2	X_1	X_7	X_8
O_{11}	O_7	O_8	X_9	X_{10}	X_{11}
	O_5	O_9	O_{10}		

Osservazioni

Nessun ospite è ostile verso l'altro gruppo:
desidera solo che almeno il 30% dei vicini sia del suo stesso tipo.

Queste preferenze sono compatibili con una perfetta integrazione.

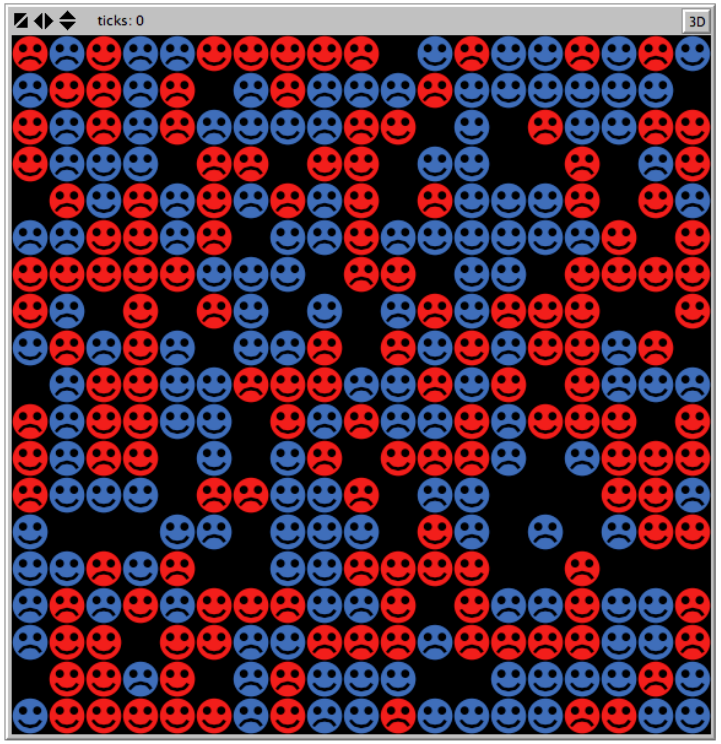
X	X	O	O	X	X
X	X	O	O	X	X
O	O	X	X	O	O
O	O	X	X	O	O
X	X	O	O	X	X
X	X	O	O	X	X

Tuttavia, se gli ospiti sono distribuiti casualmente, emerge un macrocomportamento diverso.

Due modelli

1) Gli agenti sono disposti su una striscia unidimensionale.
Gli otto vicini di un agente sono quattro a destra e a sinistra.

2) Gli agenti sono disposti su un piano bidimensionale.
Gli otto vicini circondano l'agente.

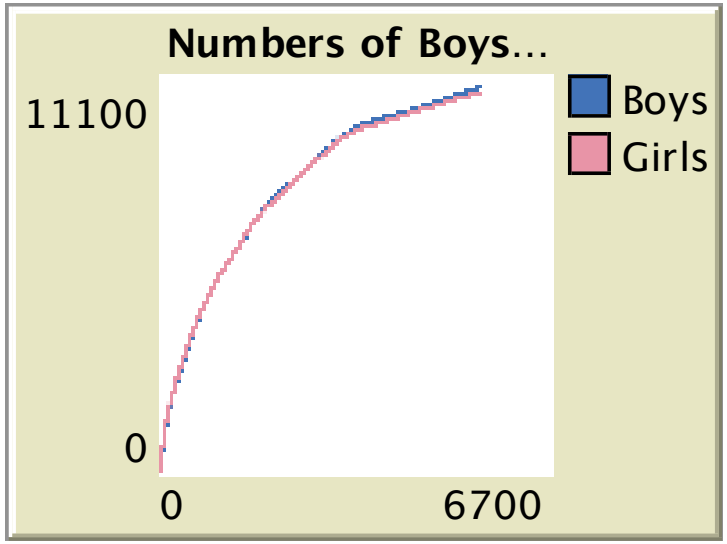


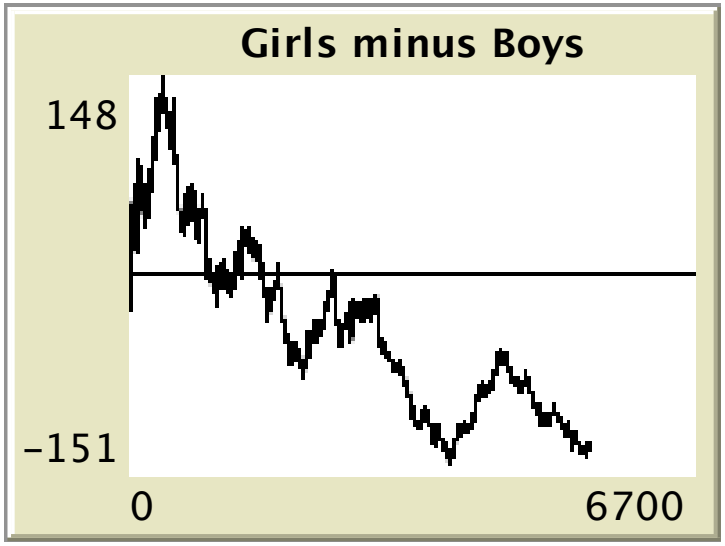
Maschi o femmine?

Ogni coppia fa figli fino a quando i maschi sono più delle femmine.

Ogni coppia k ha identica probabilità p_k di concepire un maschio.

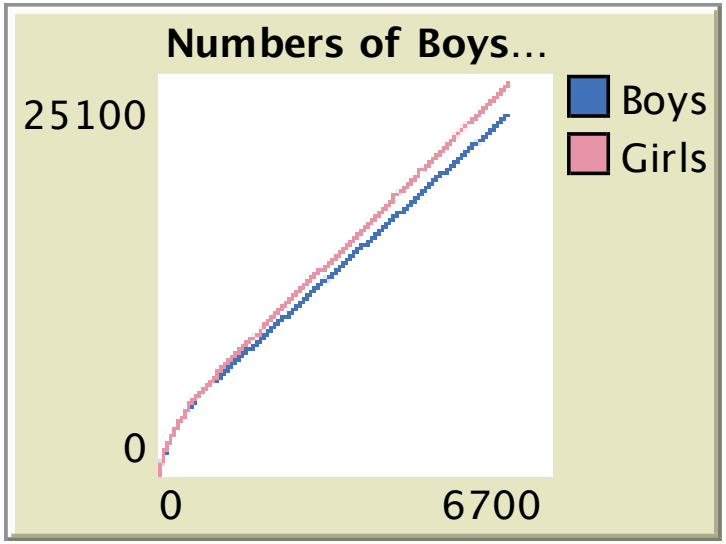
Se $p_k = 1/2$ per ogni coppia, i maschi saranno più delle femmine.
(Ogni famiglia si ferma quando $m > f$.)

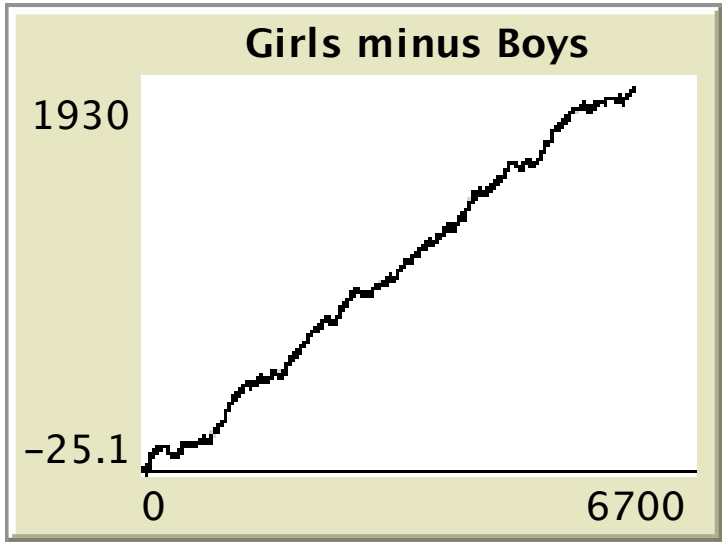




Le coppie cercano i maschi e la società si ritrova con più maschi.

Adesso introduciamo un pizzico di diversità:
p_k vale in media $1/2$ ma è diversa per ogni coppia.





Le coppie cercano i maschi e la società si ritrova con più femmine!

Come mai? Le famiglie con $p_k > 1/2$ si fermano rapidamente e sono in media più piccole; mentre le famiglie con $p_k < 1/2$ continuano a far figli che tendono a nascere femmina.

Violenza etnica

Considerate due gruppi etnici: Hutu/Tutsi, oppure Serbi/Bosniaci.

A sinistra, le due etnie si riconoscono reciproco diritto alla coesistenza e convivono pacificamente.

A destra, ogni tanto qualcuno si "accende" ed elimina un rivale dell'altra etnia.

Intervento dei caschi blu

L'ONU frappone i caschi blu fra le due etnie, con il mandato di bloccare le "teste calde" e stabilizzare la situazione.

Guerra civile e rivoluzioni

Un regime repressivo non resta al potere perché la sua polizia è più forte del popolo, ma perché la prima si coordina assai meglio del secondo.

Tocqueville: "non è sempre che le rivoluzioni scoppiano quando le cose vanno di male in peggio [...] al contrario, accade più spesso che quando un popolo ha sopportato per lungo tempo una tirannia senza protestare [...], si sollevi contro di questa".

Gli effetti del panico

A sinistra, osservate una folla che esce ordinatamente da un locale (senza panico).

A destra, la stessa folla in preda al panico. Osservate l'aumento di pressione.

Controllo del panico

A sinistra, la pressione indotta dal panico produce vittime, che riducono ulteriormente la velocità di deflusso.

A destra, un audace suggerimento per ridurre la pressione della folla.

Evitate gli allargamenti

A sinistra, il flusso delle persone in un corridoio di ampiezza costante.

A destra, il flusso delle persone in un corridoio di ampiezza variabile. Osservate l'effetto perverso prodotto dallo slargo.

Un'ultima osservazione

Vogliamo scommetttere?

Ci sono meno persone sedute in prima fila che in quarta fila.

Grazie per la vostra attenzione.