Simmetrie e rottura di simmetrie in Fisica

F. Strocchi
Scuola Normale Superiore, Pisa

1. Introduzione

Fin dall'antichita' il concetto di simmetria ha affascinato filosofi, matematici, artisti e pensatori in genere. La sua formalizzazione matematica a partire dalla fine del XIX secolo (in particolare ad opera di Galois) ha portato a sviluppi molto significativi in matematica (teoria dei gruppi) e in particolare nella fisica moderna, tanto che alcune delle piu' grandi scoperte della fisica teorica del XX secolo possono essere intese come scoperte dell' esistenza di particolari proprieta' di simmetria delle leggi fisiche. Soprattutto nella seconda meta' del XX secolo, il *concetto di simmetria* e' stato approfondito e raffinato con le realizzazione del meccanismo di *rottura spontanea di simmetria* che, come vedremo in seguito, e' alla base di importanti rivoluzioni concettuali nella fisica.

Per appoggiare tali affermazioni, senza entrare nel merito delle loro valenze concettuali, bastera' menzionare la teoria della Relativita' (ristretta) di A. Einstein, che corrisponde alla realizzazione dell' invarianza delle leggi fisiche per osservatori che si muovano con velocita' costante l' uno rispetto all' altro; in tal caso la legge di corrispondenza o simmetria e' descritta dalle cosidette trasformazioni di Lorentz, che coinvolgono oltre allo spazio anche il tempo (relativita' del tempo einsteniano), a differenza delle trasformazioni galileiane per le quali il tempo e' invariante (tempo assoluto della fisica galileiana-newtoniana).

Alcuni dei fenomeni piu' sorprendenti e interessanti della struttura della materia, come il ferromagnetismo, la superfluidita' e la superconduttivita', sono collegati al meccanismo delle transizioni di fase, per le quali un ruolo determinante e' giocato dal concetto di *simmetria spontaneamente rotta.*

Tale idea, di realizzazione e comprensione relativamente recente, appare abbastanza rivoluzionaria nella fisica teorica in quanto combina due proprieta' apparentemente incompatibili, e cioe' la simmetria delle interazioni tra i componenti di un sistema e la *asimmetria* dei fenomeni fisici associati al suo comportamento. Essa sembra anche contraddire la relazione tra simmetrie della dinamica e costanti del moto, formalizzata dal teorema di Noether, che ha giocato un ruolo concettuale molto importante nella fisica classica.

Per ora vogliamo solo aggiungere che anche la recente teoria unificata delle interazioni tra Particelle Elementari (i costituenti del mondo subnucleare) e' stata resa possibile grazie all' idea di simmetria spontaneamente rotta.

Nella discussione seguente ci proponiamo di illustrare a grandi linee il concetto di simmetria in fisica e il contenuto rivoluzionario dell' idea di simmetria spontaneamente rotta, [1] con un linguaggio, speriamo, accessibile anche ad un pubblico non specialista, ovviamente senza far uso della precisione tecnica che l' argomento richiederebbe. Cercheremo di spiegare le idee di base avvalendoci di esempi e modelli concreti, che pur nella loro semplificazione estrema mimino e illustrino i meccanismi essenziali. Lo scopo e' quello di stimolare curiosita' e interessi, ovviamente senza nessuna pretesa di completezza e sistematicita', ma senza tuttavia derogare dalla correttezza e fondatezza matematica della logica adottata.

Nella discussione, alcune conclusioni saranno formalizzate con qualche semplice formula matematica, non essenziale per la logica generale del discorso, ma forse utile per chi ha una mentalita' scientifica.

[1] La letteratura su simmetrie e rottura di rimmetria e' vastissima; essa comprende studi sulla simmetria nelle espressioni artistiche, nelle forme naturali, in particolare nei cristalli, studi sulle valenze filosofiche del concetto di simmetria, sulle formalizzazioni matematiche e sulle applicazioni scientifiche in genere. A nostro avviso, molto bello e' il libro di H. Weyl, *La Simmetria*, Feltrinelli Milano 1975. Recentemente e' uscito il libro di E. Castellani, *La Simmetria*, Laterza 2001, con ampia bibliografia ragionata, a cui rimandiamo anche per la discussione dei vari aspetti. Per quanto sappiamo, non ci sembra che il fenomeno della rottura spontanea di simmetria nei suoi aspetti quasi paradossali e nelle profonde implicazioni a livello di strategie generali, sia stato discusso a livello non specialistico, a parte spiegazioni a buon mercato spesso fuorvianti, e cio' in parte giustifica la scelta dell' argomento per una lezione tenuta al Corso di Orientamento Preuniversitario, Cortona, 3-9 Settembre, 2000, riprodotta in questa nota.

2. La simmetria

Tutti conosciamo il significato del termine **simmetria** almeno nel senso del linguaggio comune. E' una proprieta' o qualita' positiva, ad es. dal punto di vista estetico; un oggetto simmetrico e' bello, almeno secondo i canoni dell' estetica classica. Forme simmetriche di grande valore estetico compaiono in Natura, ad esempio nei cristalli (Fig.1), e fin dall' antichita' la presenza di simmetria nella realizzazione di oggetti, manufatti, edifici etc. e' stata considerata un pregio, se non un vero e proprio canone estetico.

Per una illustrazione delle simmetrie presenti nelle forme naturali, nell' arte e nel pensiero matematico rimandiamo al bel libro di H. Weyl.

Tra le forme piu'semplici di simmetria c'e' quella bilaterale o destra-sinistra per cui una forma resta invariata se si fa una riflessione rispetto all' asse (o piano) mediano . Un' altra semplice simmetria e' l' invarianza rispetto a rotazioni attorno ad un punto centrale, (realizzata ad esempio da un corpo sferico); in particolare la simmetria esagonale corrisponde all' invarianza rispetto a rotazioni di sessanta gradi (Fig 1). La simmetria traslatoria corrisponde all'invarianza sotto traslazioni di un certo passo .

La godibilita' estetica di una forma o oggetto simmetrico si accompagna, forse in maniera imprescindibile, al fatto che la sua percezione e la sua descrizione e' semplificata; un oggetto, specie se complesso, senza proprieta' di simmetria e' piu' difficile da descrivere e la sua percezione e fissazione visiva piu' laboriosa. La simmetria si apparenta quindi con la semplicita' e l' ordine, la assenza di simmetria con la complessita, con la molteplicita'.

Per entrare in parte nel tema, vorrei gia' a questo livello aggiungere che la simmetria e' bella ed apprezzabile in un contesto di non simmetria; la simmetria spinta oltre un certo limite puo' sconfinare nell' uniformita'. Paradossalmente, se fossimo tutti l' immagine l'uno dell'altro, il mondo sarebbe piuttosto noioso e piatto.

Per illustrare il rapporto dialettico tra simmetria e non simmetria, e introdurre il tema, che si sviluppera' in seguito, della **rottura di simmetria**, anche ad un pubblico con interessi umanistici, vorrei prendere ad es. la facciata della cattedrale di San Michele a Lucca (fig. 2), in cui e' evidente la simmetria rispetto all' asse centrale e il suo valore estetico. Ad una indagine piu' dettagliata, pero', si scopre che le colonnine sono una diversa dall' altra, cioe' il canone estetico diviene quello della rottura di simmetria. Il risultato e' di rendere la facciata piu' vibrante, piu' mossa, piu' interessante. Per quel che puo' valere, in tale esempio abbiamo quindi una simmetria valida a grandi linee (a livello "macroscopico") e una sua rottura nei dettagli (livello "microscopico").

In conclusione, se da un lato e' piu' semplice descrivere un oggetto simmetrico, dall' altro la rottura di simmetria e' vitale per la diversita', per la molteplicita', per la non uniformita'.

Vediamo come questa tematica prende forma in un contesto scientifico, cioe' passando dalla categoria estetica a quella fisico matematica.

3. Simmetrie in Fisica

Innanzitutto e' conveniente ricordare che la fisica si occupa della descrizione del comportamento di sistemi che sono oggetti delle esperienze fisiche, cioe' delle misure di laboratorio e di esperimenti riproducibili.

Un **sistema fisico** e' quindi un oggetto riproducibile, definito dalle misure che si possono fare su di esso, cioe' dalle misure delle sue *proprieta' o quantita' osservabili.*

Lo **stato** o **configurazione di un sistema fisico** ad un certo istante e' la sua descrizione completa al dato istante, cioe' la "fotografia" di un suo modo di essere al dato istante.

Ad esempio, per una pallina che rotola su un piano, la sua configurazione C ad un dato istante e' data dalla sua posizione P e dalla sua velocita' $\vec{v}$, $C \equiv (P, \vec{v})$, (dove la freccetta indica che per identificare completamente una velocita' occorre dare anche la sua direzione e verso). Tale definizione di stato ad un certo istante formalizza un concetto che piu' o meno inconsciamente fa parte del nostro bagaglio comune; tutti infatti diamo per scontato che per individuare un' auto in corsa dobbiamo dire a che punto del circuito si trova e con quale velocita' procede.

La configurazione di un sistema fisico (ad un certo istante) puo' avere delle proprieta' di simmetria e in tal caso la sua descrizione e' ovviamente semplificata. Ad es. un oggetto (fermo) di forma sferica e' simmetrico per rotazioni attorno al centro della sfera, cioe' la sua configurazione non cambia se faccio ruotare il sistema attorno al suo centro. La simmetria di una configurazione di un sistema (ad un certo istante), e' il livello piu' semplice e piu' facilmente apprezzabile di simmetria in fisica (vedi le simmetrie dei cristalli); nel seguito chiameremo tale tipo di simmetria **simmetria geometrica**, in quanto e' legata essenzialmente alla forma geometrica del sistema o piu' in generale alla geometria della sue configurazioni.

Ad un livello piu' profondo e piu' difficile da realizzare abbiamo il concetto di **simmetria dinamica** o piu' in generale **simmetria fisica** di un sistema. Essa e' definita da una legge di corrispondenza tra le configurazioni del sistema tale che il moto o piu' in generale la evoluzione temporale conserva tale corrispondenza. In questo senso il *comportamento del sistema e' simmetrico*.

Con un minimo di formalizzazione, una legge di corrispondenza $\mathcal{S}$ associa ad ogni configurazione C del sistema fisico una sua corrispondente $\mathcal{S}\,C$, (nel linguaggio matematico $\mathcal{S} : C \to \mathcal{S}C$). L' esempio piu' rilevante di corrrispondenza e' quello fornito dalla dinamica o evoluzione temporale α_t, che associa ad ogni possibile configurazione C, che il sistema puo' avere al tempo zero, la corrispondente configurazione $\alpha_t C$ che il sistema ha al tempo t a seguito della evoluzione temporale. Per semplicita' nel seguito indicheremo $\alpha_t C$ brevemente con C_t.

Con tali precisazioni, una legge di corrispondenza $\mathcal{S}$ e' una simmetria fisica o brevemente una **simmetria** se

$$(\mathcal{S}C)_t = \mathcal{S}C_t.$$

Il comportamento del sistema e' simmetrico in quanto configurazioni corrispondenti restano tali anche nel corso della evoluzione temporale; in particolare, se ad un certo istante una configurazione e' simmetrica, cioe' invariante sotto $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}\,C = C$, resta tale ad ogni istante successivo.

Ad es. il sistema costituito da una pallina da bigliardo che rotola su un piano infinitamente esteso ha la simmetria fisica per *traslazioni* sul piano e per *rotazioni* con asse ortogonale al piano, cioe' una traslazione (o rotazione) seguita dalla evoluzione temporale da' lo stesso risultato della evoluzione temporale seguita dalla traslazione (o rotazione) (Figg. 3, 4).

Non e' difficile convincersi che la simmetria per traslazioni e rotazioni, permane anche se si cosiderano piu' palline anche interagenti, ad es. due palline legate da una molla che si muovono sul piano.

La simmetria per traslazioni in ogni direzione e per rotazioni attorno ad un qualunque punto dello spazio, detta anche **simmetria euclidea**, vale ad es. per il sistema ("isolato") costituito dal sole e da un pianeta che gli gira attorno (fig. 5).

Piu' in generale, come e' facile convincersi, *la simmetria euclidea vale per ogni sistema (isolato) costituito da piu' corpi, interagenti con forze che dipendono solo dalle distanze relative.*

Tali considerazioni portano a domandarsi quale sia la portata concettuale e la ragione profonda dell' esistenza di tali simmetrie, anche in vista del meccanismo di rottura di simmetria. Per porre bene la domanda occorre tener presente che la descrizione di un sistema fisico presuppone il concetto di "ambiente" o "spazio" in cui tale sistema vive; per dire che ho un sistema di due particelle devo dare per scontato il concetto di **spazio senza particelle** o **spazio vuoto**. La descrizione viene fatta relativamente alla situazione in cui il sistema in oggetto non e' presente.

La presenza di una simmetria per un sistema fisico e' quindi la conseguenza di due proprieta'

1) le forze con cui interagiscono i componenti del sistema sono invarianti sotto la trasformazione di simmetria

2) lo spazio vuoto o l'ambiente in cui il sistema vive e' simmetrico

Ad es. per il sistema isolato costituito dal Sole e un pianeta le forze dipendono solo dalla distanza relativa e quindi non cambiano se traslo in qualunque direzione entrambi i corpi o se faccio una rotazione rispetto ad un asse qualunque. D'altra parte lo spazio vuoto, e' invariante per traslazioni e rotazioni in quanto non c' e' una posizione assoluta ne' una direzione privilegiata nello spazio vuoto. Lo spazio vuoto e' omogeneo, cioe' ogni suo punto e' equivalente a qualunque altro.

Tale concetto di spazio vuoto e' quello della *geometria euclidea*, che infatti puo' essere caratterizzata come la geometria associata alla simmetria euclidea (cioe' all' invarianza per traslazioni e rotazioni [2]); infatti i concetti di retta, angolo tra due rette etc. sono invarianti per traslazioni e rotazioni. La simmetria euclidea e' quindi legata alla concezione filosofica dello **spazio euclideo** invariante per traslazioni e rotazioni.

Emerge da tali considerazioni la valenza filosofica delle simmetrie come negazione di concetti assoluti e la loro relativizzazione: l' invarianza per traslazioni implica che non c' e' posizione assoluta di un evento fisico, ma solo una posizione relativa. Similmente, l' invarianza per rotazioni nega che si possa dare senso fisico al concetto di direzione assoluta, ma solo a quello di direzione relativa.

Da un punto di vista operativo, la **simmetria euclidea** ha importanti conseguenze fisiche. Le *leggi fisiche*, cioe' le *relazioni tra eventi*, trovate facendo esperimenti a Pisa o al Fermilab di Chicago sono le stesse, cioe' il

[2] Tale punto e' stato enfasizzato da F. Klein

comportamento dei sistemi fisici oggetto degli esperimenti e' lo stesso se si trasla il laboratorio o si fa una rotazione. In termini appena piu' tecnici, si puo'dire che le leggi fisiche fondamentali (prescindendo da effetti accidentali) sono indipendenti dal sistema di riferimento (inerziale) scelto (fig. 6).

Tale concezione filosofica, che puo' essere fatta risalire ad Euclide e che comunque e' alla base della fisica teorica da Galilei ai nostri giorni (a parte effetti della Relativita' Generale) ha indotto a dare per scontato che la indipendenza rispetto al sistema di riferimento includesse anche la indipendenza dal carattere destrorso o sinistrorso del sistema di riferimento (fig. 6), cioe' che le leggi fisiche fossero invarianti per riflessione speculare, detta anche **parita'** e indicata con P .

Cio' vuol dire che le leggi fisiche dedotte in un laboratorio e quelle dedotte dalle immagini speculari degli esperimenti fatti in tale laboratorio, sono le stesse. Tale punto di vista sembra avere ragioni filosofiche molto ragionevoli: come non e' possibile scegliere una posizione o una direzione privilegiate, non deve essere possibile scegliere tra un sistema di riferimento destrorso e uno sinistrorso.

E' immediato vedere che tale simmetria per parita' e' in effetti condivisa dal sistema Sole e pianeta e piu' in generale dai sistemi i cui costituenti interagiscono con forze dipendenti solo dalle distanze relative, in quanto lo spazio vuoto euclideo e' simmetrico per parita'.

Tale pregiudizio filosofico ha caratterizzato la fisica fino al 1957 ed e' stato ritenuto un criterio cosi' inoppugnabile da essere usato per escludere teorie e/o la possibilita' di fenomeni che non lo soddisfacessero.

Nella nostra esperienza quotidiana siamo abituati ad una realta' in cui la destra e la sinistra non sono equivalenti, ma non e' difficile ricondurre tale asimmetria a ragioni contingenti, non fondamentali, ad effetti accidentali.

In tale contesto concettuale, si puo' immaginare quanto dirompente sia risultata la teoria di Lee e Yang che per spiegare alcuni fenomeni anomali in fisica nucleare ha proposto una violazione della simmetria di parita', poi verificata sperimentalmente, che ha valso il premio Nobel ai due fisici. Si puo' forse dire che essa abbia rappresentato il crollo di uno dei piu' radicati pregiudizi, associati alla simmetria euclidea, tanto che Pauli ne ha voluto sottolineare il contenuto "eretico", scherzosamente dicendo che "Dio ha creato il mondo come se fosse mancino", cioe' differenziando in maniera sostanziale la destra dalla sinistra.

La teoria di Lee e Yang lascia aperta la possibilita' che la simmetria speculare possa in qualche modo essere recuperata se combinata con la cosidetta *coniugazione di carica* C, cioe' con la traformazione che scambia ogni particella con la sua antiparticella (che ha carica opposta); ad es. C trasforma uno stato di elettrone nel corrispondente stato della sua antiparticella, chiamata positrone, e similmente il protone in antiprotone etc. La invarianza della fisica sotto la simmetria risultante, chiamata CP, vuol dire che le leggi fisiche dedotte in un laboratorio sono le stesse di quelle dedotte dalle immagini speculari con lo scambio particella $\rightleftharpoons$ antiparticella. In questo modo si stabilisce un legame tra una simmetria di tipo spaziale (P) e una simmetria relativa alla carica, non riconducibile a trasformazioni relative allo spazio euclideo.

La validita' di tale generalizzazione della simmmetria speculare e' caduta nel 1964, a seguito dell' esperimento (che ha valso il premio Nobel a Fitch e Cronin) che ha rivelato la violazione di CP nei decadimenti delle particelle K_0, $\bar{K}_0$. [3] Tale fenomeno, riprodotto recentemente con grande raffinamento sperimentale dal gruppo di Mannelli, ha una profonda valenza concettuale in quanto stabilisce una asimmetria tra materia e antimateria.

Attualmente, c' e' evidenza sperimentale e teorica che le leggi fisiche sono invarianti per la simmetria TCP, cioe'per la combinazione di CP con la trasformazione T che inverte la direzione del tempo. La simmetria TCP equivale a dire che per ottenere invarianza delle leggi fisiche, nelle immagini speculari degli eventi fisici occorre, oltre a scambiare particelle con antiparticelle, guardare la successione degli eventi come in un film all' indietro.

La validita' della simmetria TCP e' teoricamente legata alla invarianza relativistica e alla microcausalita' (o localita') e una sua violazione metterebbe in causa i fondamenti stessi della teoria attuale delle interazioni delle particelle elementari.

[3] Per il ruolo delle simmetrie nella fisica delle particelle elementari, si veda ad es. *Simmetria e realta'*, Le Scienze, Quaderni n.118, a cura di E. Castellani, Febb. 2001; A. Zee, *Fearful symmetry. A search for beauty in modern physics*, McMillan 1986.

4. Simmetria isotopica. Simmetria di colore

Il riconoscere l'esistenza di una simmetria nella descrizione matematica di un sistema fisico e' molto importante per i seguenti motivi
i) (vantaggio "tecnologico") semplifica la descrizione di un sistema fisico e ne fa meglio comprendere il comportamento. Ad es. se c'e' simmetria per rotazioni, risolto il problema dinamico per una configurazione, l'ho automaticamente risolto anche per tutte le configurazioni ottenute per rotazioni da quella data
ii) (vantaggio di economia concettuale) la esistenza di una simmetria (anche se spontaneamente rotta, come vedremo in seguito) permette di *unificare* la descrizione di sistemi apparentemente diversi.

Per illustrare il punto 2) consideriamo il caso di **simmetrie non spaziali** cioe' non legate a trasformazioni dello spazio euclideo.

Cominciamo da un esempio semplice ma, a nostro avviso, istruttivo. Supponiamo di avere un sistema costituito da palline bianche (b) e nere (n) in moto (Fig. 7) la cui dinamica e' regolata dalle leggi degli urti tra due palline che sono di tre tipi: bianca- bianca (brevemente b-b), nera-nera (n-n), e bianca-nera (b-n). Supponiamo che la trasformazione che scambia i colori (brevemente b $\to$ n, n $\to$ b) sia una simmetria, nel senso che le interazioni siano invarianti sotto tale scambio, cioe' il meccanismo dell'urto b-b sia uguale a quello n-n (ma non necessariamente b-b = b-n !). Cio' implica che se scambio le palline bianche con le nere (Fig. 7'), il comportamento del sistema non cambia; ad es. il moto della pallina bianca segnata col numero 1 nella Fig. 7 e' lo stesso di quella della pallina nera segnata col numero 1 nella Fig. 7' ottenuta con lo scambio del bianco col nero. Il risultato e' che esistono due tipi di particelle, ma il loro comportamento e' simmetrico, cioe' se sappiamo controllare il moto di un tipo, per simmetria sappiamo automaticamente anche il comportamento dell' altro tipo. In conclusione abbiamo unificato la descrizione del sistema riducendola a quella di un solo componente.

L' esempio discusso sopra riproduce in forma semplificata una situazione di grande rilevanza fisica. Come tutti sappiamo, gli atomi sono costituiti da un nucleo centrale N e da elettroni che gli girano attorno in un sistema di tipo planetario (Fig. 8). Il nucleo a sua volta e' composto da due tipi di particelle, protoni e neutroni, tenuti insieme nel nucleo dalle cosidette forze nucleari.

Nel 1932 Heisenberg suggeri' che le forze nucleari (e quindi il sistema di neutroni e protoni interagenti tramite le forze nucleari) siano simmetriche rispetto alla simmetria di scambio *protone* $\rightarrow$ *neutrone*, *neutrone* $\rightarrow$ *protone*, brevemente p$\rightarrow$ n, n $\rightarrow$p, (**simmetria isotopica**), come per le palline bianche e nere delle esempio sopra discusso. Tale ipotesi fu clamorosamente confermata dai dati sperimentali, col risultato di una drastica semplificazione della teoria delle forze nucleari. [4]

In tale teoria (trascurando le forze elettromagnetiche e quelle deboli responsabili della radioattivita', entrambe molto piu' piccole delle forze nucleari) la dinamica del protone e del neutrone e' riconducibile a quella di un solo tipo di particella, detto *nucleone*. Come nell' esempio sopra, si ha una unificazione della descrizione dei due tipi di particelle in termini di un solo componente. In particolare due nuclei che sono trasformati l' uno nell' altro con lo scambio p $\rightleftharpoons$ n, come ad es. il nucleo H^3, composto da due neutroni e un protone(nnp) e il nucleo He^3 composto da (ppn), hanno le stesse proprieta' per quanto riguarda la fisica nucleare.

Un altro esempio di simmetria non spaziale e' quella cosidetta di *colore*. Abbiamo visto che gli atomi sono fatti di elettroni e nuclei e questi ultimi sono fatti di protoni e neutroni. A loro volta neutroni e protoni sono fatti di componenti ancora piu' elementari, detti *quarks*, di cui forse alcuni di voi avranno sentito parlare nella letteratura giornalistica o di divulgazione scientifica. Come il modello atomico ha fornito una spiegazione semplice del sistema periodico degli elementi, l'idea dei quarks e delle loro simmetrie ha permesso di mettere ordine nella famiglia delle particelle elementari, inizialmente consistenti solo di neutrone, protone ed elettrone e poi proliferate fino ad oltre il centinaio.

Attualmente si conoscono tre famiglie di quarks, ciascuna consistente di due tipi di quarks detti "up" e "down"; la simmetria che scambia up con down corrisponde alla simmetria isotopica discussa sopra per il neutrone e il protone. Infatti, il neutrone e' fatto di due up e un down (uud) e il protone e' fatto di due down e un up (ddu). In ogni famiglia le coppie di quarks

[4] In realta', in questo caso la simmetria e' piu' forte del semplice scambio, essendo ammesse anche "miscele continue" di bianco e nero come sommariamente rappresentate nel cerchio della Fig. 9; per rendere in parte l' idea si puo' dire che la simmetria e' per una qualunque rotazione lungo il cerchio. Piu' precisamente, essa corrisponde alla simmetria descritta dal gruppo $SU(2)$. Per le implicazioni sulla teoria delle particelle elementari rimandiamo al citato libro di A. Zee.

(up, down) sono replicate tre volte, ciascuna di un "colore" diverso [5] che convenzionalmente sono stati chiamati bianco (w), rosso (r) e blu (b) (come i colori della bandiera statunitense)(Fig.10).

La simmetria che scambia i colori, ad es. $w \to r$, $r \to b$, $b \to w$, e' detta **simmetria di colore**. [6] C' e' evidenza sperimentale che tale simmetria sia esatta, cioe' tutte le forze note sono invarianti per tale simmetria (mentre la simmetria isotopica e' una proprieta' di invarianza delle forze nucleari, ma non delle piu' piccole interazioni elettromagnetiche e deboli responsabili delle piccole differenze tra il protone e il neutrone).

Addirittura si pensa che la simmetria di colore valga in una forma assai piu' forte di quelle viste sopra e cioe' nella forma che il comportamento dei quarks non cambia se faccio trasformazioni di colore diverse da punto a punto nello spazio; ad es. se in una zona o area di un laboratorio cambio w in r , r in b e b in w, e in un' altra zona del laboratorio faccio una trasformazione diversa ad es. w in b, b in r e r in w.

Una simmetria che vale in questa forma molto forte viene detta *simmetria di gauge* e la *simmetria di colore e' una simmetria di gauge esatta.* Come conseguenza non e' possibile giungere ad un criterio operativo per identificare quarks di un dato colore, in quanto il criterio fissato sulla base di osservazioni in una zona del laboratorio non e' applicabile ad un' altra zona del laboratorio o in un laboratorio spostato.

Secondo le idee della fisica teorica corrente, l' essere il colore una simmetria di gauge esatta implica che i quarks stessi non sono fisicamente isolabili, cioe' producibili isolatamente in un laboratorio; essi sono fisicamente osservabili solo in composti invarianti per trasformazioni di colore. Tale impossibilita' di osservare i quarks prende il nome di confinamento dei quarks. Abbiamo qui un esempio di come il massimo di simmetria porti ad un appiattimento della realta'.

[5] Naturalmente il termine colore e' solo un nome fittizio per indicare una proprieta' che non ha nulla a che vedere col colore nel senso del linguaggio comune.

[6] In realta', come per la simmetria isotopica, la simmetria di colore va oltre il semplice scambio, essendo ammesse miscele continue di colori corrispondenti alle trasformazioni descritte dal gruppo $SU(3)$.

5. Rottura spontanea di simmetrie

L' ideale della massima simmetria nella descrizione dei sistemi fisici si scontra con il problema di rendere conto della diversita'. La strategia canonica della fisica teorica fino a qualche decina di anni fa e' stata quella di legare con una simmetria sistemi fisici simili, unificandone pertanto la descrizione, e introducendo delle piccole forze ad hoc per spiegarne le piccole differenze. Abbiamo visto l' esempio del neutrone e del protone che sono interscambiabili per le forze nucleari e le cui piccole differenze sono dovute alle forze elettromagnetiche e deboli. La logica e' quindi quella di mettere insieme sistemi le cui proprieta' dominanti sono simmetriche, ascrivendo a forze o ad effetti piccoli le piccole differenze.

Tale logica ha dimostrato pero' i suoi forti limiti anche di tipo concettuale:
i) vi e' una certa arbitrarieta' e difficolta' nella identificazione delle piccole forze responsabili della rottura di simmetria
ii) per sua stessa definizione tale logica non permette di unificare la descrizione di sistemi o fenomeni molto diversi.

E' questo il problema con cui si e' scontrato Fermi, a cui si deve la teoria delle interazioni deboli, responsabili dei processi radioattivi. Nel 1933, con un articolo pionieristico, Fermi propose una teoria delle interazioni deboli sulla base di una stretta analogia con quelle elettromagnetiche.

Il successo sperimentale della teoria di Fermi e' stato clamoroso e sappiamo che Fermi si pose il problema concettuale della origine e della spiegazione della analogia alla base della sua teoria, in particolare domandandosi se essa fosse riportabile ad una qualche simmetria tra le interazioni deboli e quelle elettromagnetiche. Su questo problema Fermi continuo' a lavorare per anni (il problema fu dato anche come argomento di tesi ai suoi brillanti studenti Lee e Yang, poi premi Nobel per la scoperta della violazione di parita'), ma senza successo. La difficolta' sostanziale alla base di tale insuccesso e' che anche se le forze elettromagnetiche e deboli sono entrambe molto piu' piccole di quelle nucleari, i processi fisici a cui danno luogo sono molto diversi, quelli deboli essendo almeno cento volte piu' deboli di quelli elettromagnetici.

La soluzione e' arrivata solo nel 1967 con la teoria di Weinberg-Salam, che unifica le interazioni elettromagnetiche e deboli, per la quale hanno ottenuto, insieme a Glashow, il premio Nobel (e la cui verifica sperimentale ha valso il premio Nobel a Rubbia).

E' ovvio che non e' possibile render conto di tale teoria nei limiti imposti dalla presente relazione, ma vorrei almeno illustrare, anche sommariamente, l' idea alla base di tale successo, cioe' l' idea di **rottura spontanea di simmetria**. Essa ha rappresentato un cambiamento, a mio avviso rivoluzionario nella fisica teorica e, come ho detto all' inizio, e' alla base degli sviluppi della fisica teorica dell' ultimo mezzo secolo (ferromagnetismo, transizioni di fase , superfluidita', superconduttivita', unificazione delle interazioni delle particelle elementari etc.).

Per iniziare, riprendiamo l' esempio visto precedentemente di due tipi di palline in moto su un piano, che ora prendero' di colore rosso (r) e blu (b), anziche' bianche e nere, e come prima assumeremo che le interazioni, cioe' gli urti tra due palline siano simmetrici per lo scambio dei due colori. Se il piano su cui le palline si muovono non distingue i due colori, diciamo per esempio che e' bianco, e quindi simmetrico sotto lo scambio dei colori, il comportamento dei due tipi di palline risulta simmetrico (Figg.11), come nel caso precedente delle palline bianche e nere.

Se pero' il piano, cioe' l' ambiente in cui vivono le palline non e' invariante di colore, ad es. e' ricoperto da piastrelle a due faccie di colori rosso e blu rispettivamente e le palline rotolano meglio su piastrelle del loro colore, allora non ho piu' simmetria. Cioe', se ad es. il pavimento e' rosso e scambio le palline rosse con le blu, queste ultime hanno una dinamica diversa (sul piano rosso) ripetto alle rosse (Figg. 12). Per ottenere simmetria dovrei accompagnere lo scambio del colore delle palline con l' analogo cambiamento del colore del piano, in pratica con il rovesciamento delle piastrelle. Questa operazione puo' non essere un' operazione fisicamente possibile, ad es. se il piano e' infinitamente esteso, perche' e' fisicamente impossibile fare delle operazioni che coinvolgano tutti i punti dello spazio, le uniche operazioni possibili essendo quelle che coinvolgono regioni finite di spazio, cioe' nel nostro esempio il rovesciamento di un numero finito di piastrelle.

La lezione di questo semplice esempio e' abbastanza chiara e illustra il meccanismo delle rottura spontanea di simmetria:
i) le forze o piu' in generale le interazioni tra i componenti del sistema sono simmetriche, ma
ii) l' ambiente, lo spazio in cui il sistema vive non e' simmetrico e pertanto il loro comportamento non e' simmetrico.

C' e' il rischio che tutto cio' possa sembrare quasi un giochetto, al limite un trucco piuttosto banale, ma in realta' il meccanismo di rottura spontanea di simetria ha radici concettuali profonde, essendo basato sulla scoperta che lo spazio vuoto puo' non essere simmetrico rispetto alle simmetrie delle interazioni tra i componenti del sistema.

Siamo abituati all' idea dello spazio (vuoto) euclideo che si comporta come uno spettatore asettico e completamente neutrale degli eventi fisici che in esso hanno luogo. Anche da un punto di vista intuitivo, sembra molto naturale che lo spazio vuoto non abbia attributi o proprieta', al di la' della sua omogeneita' e invarianza euclidea. Cio' e' infatti quello che si e' sempre pensato in passato, fino a tempi molto recenti, e pertanto e' stata una scoperta non banale capire che non deve necessariamente essere cosi'.

L' idea che il vuoto possa non essere simmetrico rispetto alla simmetria delle interazioni tra i costituenti ultimi del nostro mondo e' l' idea rivoluzionaria che e' mancata a Fermi. La teoria di Weinberg-Salam che unifica le interazioni elettromagnetiche e deboli e' basata sul fatto che il vuoto non e' invariante sotto la simmetria che scambia le interazioni elettromagnetiche e deboli. Da una parte quindi i due tipi di forze sono unificabili in un unico tipo di forza, essendo l' una la corrispondente dell' altra sotto la trasformazione di simmetria, (tecnicamente descritta dal gruppo $SU(2) \times U(1)$), e in questo modo si capisce l' origine profonda della analogia intuita da Fermi e alla base della sua teoria delle interazioni deboli. D' altra parte le grosse differenze tra i fenomeni elettromagnetici e quelli deboli (il problema con cui si e' scontrato Fermi) sono spiegabili e riconducibili alla non invarianza del vuoto sotto la simmetria (*rottura spontanea di simmetria*).

Per evitare di dare l' impressione di un meccanismo senza fondamento matematico e' opportuno far presente il problema del controllo matematico delle proprieta' di simmetria dello spazio vuoto. Un problema simile si pone anche per il meccanismo di rottura spontanea di simmetria nella struttura della materia (come vedremo in seguito in un semplice esempio), dove il ruolo del vuoto e' giocato dalla configurazione del sistema ad energia minima o *stato fondamentale*, (in genere invariante per traslazioni spaziali), rispetto al quale si descrivono le eccitazioni elementari e il loro comportamento.

Per sistemi infinitamente estesi, come i campi che descrivono le interazioni tra le particelle elementari (come ad es. il campo elettromagnetico), o i sistemi complessi (al limite termodinamico di volume infinito) che descrivono la struttura della materia, il vuoto o lo stato fondamentale e' definito come lo stato ad energia minima e pertanto le sue proprieta' di simmetria sono legate al problema dinamico di determinare lo stato ad energia minima.

Tecnicamente, e' un fatto ormai acquisito, con i metodi dell' analisi funzionale non lineare, che in generale le soluzioni di equazioni non lineari di evoluzione temporale di un sistema infinitamente esteso si dividono in "isole", dette anche "fasi" o "mondi disgiunti", ciascuna individuata da un suo (spazio) vuoto o stato fondamentale (invariante per traslazioni), in genere non simmetrico rispetto alle simmetrie delle equazioni di evoluzione.

Ciascuna isola e' caratterizzata da una soluzione di riferimento ad energia minima invariante per traslazioni, che ha il significato di vuoto o stato fondamentale, e dall' insieme delle soluzioni che sono modifiche essenzialmente localizzate di esso. La soluzione di riferimento e' infinitamente estesa nel senso che coinvolge tutti i punti dello spazio e dal punto di vista della fisica teorica definisce lo spazio vuoto o l' ambiente in cui si descrivono gli eventi fisici, cioe' le sue modifiche essenzialmente localizzate.

La interpretazione fisica di mondi disgiunti si basa sulla loro stabilita' sotto evoluzione temporale e sul vincolo di essenziale localizzazione di ogni operazione fisicamente realizzabile. Vuoti o stati fondamentali diversi corrispondono infatti a configurazioni ad energia minima con diverso comportamento all' infinito, e quindi se ci troviamo a vivere in uno di tali mondi disgiunti non potremo accedere a nessuno degli altri mondi, ne' comunicare con nessuno di essi con operazioni essenzialmente localizzate (le uniche fisicamente realizzabili). Nei casi concreti, cio' richiederebbe di poter cambiare le condizioni al bordo dell'universo o della fase termodinamica del sistema complesso in cui ci troviamo a vivere.

Una simmetria delle equazioni di evoluzione, che non lascia stabile un dato "mondo" o "fase", e' quindi fisicamente rotta in tale mondo; la sua rottura e' la conseguenza della impossibilita' di realizzare la simmetria (come corrisponenza tra configurazioni del sistema) restando all' interno di un dato mondo. Il comportamento del sistema apparira' quindi irrimediabilmente e radicalmente asimmetrico.

Vale la pena di sottolineare che per il verificarsi della rottura spontanea di simmetria, nel senso radicale discusso sopra, gli ingredienti essenziali sono l' esistenza di *stati ad energia minima non simmetrici e infinitamente estesi.* L'esistenza di configurazioni di equilibrio o ad energia minima non simmetrici rispetto alle simmetrie della dinamica e' un fenomeno peculiare gia' per sistemi finiti, ma da solo esso non implica la rottura spontanea di simmmetria nel senso fisicamente e filosoficamente dirompente visto sopra. Sarebbe pertanto conveniente correggere la nomenclatura diffusa, che identifica la rottura spontanea di simmetria con la asimmetria di configurazioni ad energia minima, riservando tale termine al caso di sistemi infinitamente estesi e usando altrimenti il termine di *rottura di simmetria dello stato fondamentale.*

La rilevanza di tale distinzione appare chiara se si pensa che per una pallina che rotola su un piano, tutti i punti del piano definiscono posizioni di equilibrio (con la pallina a velocita' nulla) e nessuno di essi e' invariante per traslazioni; ma ci sembra fuori luogo e fuorviante parlare in tal caso di rottura spontanea delle traslazioni; in effetti, come come abbiamo visto, il comportamento simmetrico del sistema sotto traslazioni e' operativamente verificabile, nel senso che la traslata di una configurazione e' fisicamente realizzabile e la corrispondenza e' invariante per evoluzione temporale. [7]

I due concetti di rottura di simmetria coincidono per sistemi complessi al limite termodinamico o comunque per sistemi infinitamente estesi, in quanto per essi stati ad energia minima o vuoti diversi definiscono mondi disgiunti e quindi la loro asimmetria porta necessariamente alla rottura nel senso radicale e fisicamente sostanziale discusso sopra. E' solo tenendo conto di tale aspetto che si risolve l' apparente contraddizione tra leggi di conservazione implicate dalle simmetrie delle leggi di evoluzione (teorema di Noether) e rottura spontanea di simmetria; nel caso di sistemi infinitamente estesi la simmetria delle equazioni di evoluzione implica una *legge di conservazione locale* (tecnicamente l'equazione di continuita' per la corrente), ma la *conservazione globale* (tecnicamente la indipendenza dal tempo dell' integrale della densita') cade se la simmetria e' rotta spontaneamente. [8]

Tali strutture sono in parte mimate nell' esempio semplice delle palline rosse e blu che rotolano su un piano colorato infinitamente esteso; i due casi di piano blue e rosso definiscono i due possibili vuoti o i due possibili mondi disgiunti, con rottura spontanea di simmetria in ciascuno di essi.

In generale, nello studio di sistemi complessi, come la teoria delle particelle elementari o la teoria dei sistemi a molti corpi in stuttura della materia, e' importante, ma non semplice dal punto di vista matematico, accertare se la teoria prevede la esistenza di vuoti o stati fondamentali non simmetrici e quindi la esistenza di rottura spontanea di simmetria. [9]

---

[7] Per una discussione piu' ampia (ma anche piu' tecnica) di tali problemi, si veda F. Strocchi, *Symmetry breaking in classical systems*, Scuola Normale Superiore 1999; D. Ruelle, *Statistical Mechanics*, Benjamin 1969.

[8] F. Strocchi, *Symmetry breaking in classical systems*, Scuola Normale Superiore 1999.

[9] Per una esposizione generale e non specialistica degli effetti collettivi che conducono alla rottura spontanea di simmetria e del suo legame col limite termodinamico si veda A. Legget, *The problems of physics*, Oxford Univ. Press 1987, traduzione italiana publicata da Einaudi; D. Ruelle, *Chance and chaos*, Penguin 1993; trad. italiana pubblicata da Bollati Boringhieri.

6. Un prototipo di rottura spontanea: ferromagnetismo

Per concludere vediamo un esempio di rottura spontanea di simmetria in un sistema di grande interesse fisico, considerato anche emblematico per il meccanismo di rottura.

Supponiamo di avere un ferromagnete, molto grande, cioe' un insieme di dipoli magnetici o *spins*, interagenti con forze tra dipolo e dipolo che dipendono solo dall' angolo tra i due dipoli e che tendono ad allineare i due dipoli. Chi non e' troppo familiare con i dipoli magnetici puo' pensare ad un insieme di birilli legati da molle che tendano ad allinearli, incernierati ai vertici di un reticolo regolare (ad es. cubico, fig.13). Per comodita' grafica e per semplicita' consideriamo il caso di un reticolo unidimensionale infinitamente esteso (o come anche si dice di una catena infinita di spins), supponiamo che le interazioni siano attive solo tra dipoli prossimi vicini e che i dipoli possano assumere solo posizioni nel piano ortogonale alla catena.

Il tipo di fenomeni fisici da studiare relativamente a tale sistema sono quelli di vedere cosa succede se cerco di rovesciare uno o piu' dipoli o birilli, ad es. come si propaga nel tempo il rovesciamento di un o piu' dipoli. Come forse qualcuno avra' gia' intuito, tale azione di disturbo ha proprieta' di propagazione simile a quella di un' onda sonora o meglio ancora di una corda pizzicata. In effetti, nel caso realistico di un ferromagnete tali onde hanno un nome: *onde di spin*. La propagazione di tali onde e' l' analogo del rotolamento delle palline rosse e blu sul piano: infatti, l' ambiente privilegiato rispetto a cui descrivere tale propagazione e' lo stato ad energia minima o stato fondamentale e, nel modello semplificato definito sopra, le configurazioni ad energia minima sono quelle in cui tutti gli spin puntano nella stessa direzione.

Esse sono l' analogo dei pavimenti rosso e blu dell' esempio precedente e come in quell' esempio anche se le forze sono simmetriche per rotazioni nel piano ortogonale alla catena, la propagazione delle onde di spin relativamente ad un dato stato fondamentale non e' simmetrica, perche' ha luogo in una fase non simmetrica e pertanto le rotazioni nel piano ortogonale alla catena sono rotte spontaneamente in ogni fase definita da un stato fondamentale o configurazione ad energia minima.

Un fenomeno analogo di rottura spontanea di simmetria e' alla base della superfluidita', la proprieta' per cui l'elio liquido a bassissime temperature e' senza viscosita' e quindi puo' scorrere in un tubetto senza perdere velocita' in una specie di moto perpetuo. In tal caso, l' analogo delle configurazioni ad energia minima sono le configurazioni corrispondenti alla cosidetta condensazione di Bose-Einstein.

Il meccanismo di rottura spontanea e' anche alla base della superconduttivita', la proprieta' per cui un metallo superconduttore conduce corrente senza resistenza e quindi senza attenuazione. In tal caso, l' analogo delle configurazioni ad energia minima con tutti i dipoli allineati sono le configurazioni in cui tutti gli elettroni sono legati a coppie (dette coppie di Cooper).

Sono argomenti che ci proterebbero nel vivo della problematica di gran parte della fisica teorica moderna, ma per i quali occorrerebbe molto piu' tempo e anche un bagaglio maggiore di conoscenze di base.