FROBENIUS SINGULIER SUR UN ESPACE SINGULIER

(avec Alcidès)

En réponse à une question de R. MOUSSU

Malgrange (IHES 1976)

$\mathcal{F}$ feuilletage holomorphe de codimension 1 sur $\mathbb{C}^n, 0$.

Si $\operatorname{cod} \operatorname{Sing} \mathcal{F} \geqslant 3$ alors $\mathcal{F}$ possède une intégrale première holomorphe $f : \mathbb{C}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{C}, 0$ non constante.

$\mathcal{F}$ défini par $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^n, 0)$

$\underline{\omega \wedge d\omega = 0}$ (intégrabilité)

$$\omega = \sum_1^n a_i \, dz_i$$

$\underline{\mathrm{Sing}\,\mathcal{F}} = \mathrm{Sing}\,\omega = \{a_1 = \cdots = a_n = 0\}$

f intégrale première : $\omega \wedge df = 0$

(ici $\omega = g . df$, $g \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C}^n, 0)$)

<u>Question</u>: a-t-on un résultat analogue en remplaçant $\mathbb{C}^n, 0$ par $X \subset \mathbb{C}^N, 0$ sous ensemble analytique singulier.

Contre-exemple.

X quadrique dans $\mathbb{C}^4$:

$$xy = zt$$

$$\Pi : \mathbb{C}^4 - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^3$$

projection.

$\Pi(X) =$ quadrique de $\mathbb{P}^3 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

feuilletée par les $\mathbb{P}^1 \times \{*\}$.

$\mathcal{F}^*$ le relevé à $X^* = X - \{0\}$ de ce feuilletage par Π.

$\mathcal{F}^*$ "s'étend" à X : en fait s'étend en un feuilletage régulier de $\tilde{X}$ = éclaté de X en 0.

Ce feuilletage (en 2-plans) de X n'a pas d'intégrale 1ère holomorphe.

Rq: $\frac{y}{t}$ est une I.P méromorphe

Il n'y a pas de 1. forme $\omega \in \Omega^1(X)$ telle que $\operatorname{Sing} \omega = \{0\}$ définissant $\mathcal{F}^*$.

<u>Théorème</u> (pas le plus général)

$X \subset \mathbb{C}^N, 0$, $4 \leq \dim X$,

X à <u>singularité isolée</u> et <u>intersection complète</u>.

$\mathcal{F}^*$ feuilletage codimension 1 sur $X^* = X - \{0\}$.

Si $\underline{\operatorname{cod}_{X^*} \operatorname{Sing} \mathcal{F}^* \geq 3}$ alors $\mathcal{F}^*$ a une intégrale 1ère $\underline{f \in \mathcal{O}(X)}$.

Rq : soit $X \subset \mathbb{C}^N, 0$ intersection complète à singularité isolée.
$4 \leq \dim X$

1. $H^1(X^*, \mathcal{O}^*) = 1$

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}^*$ est défini par $\omega^* \in \Omega^1(X^*)$.

$\operatorname{cod} \operatorname{Sing} \omega^* \geqslant 3$.

2. $H^1(X^*, \mathcal{O}) = 0$
(implique propriétés de division)

3. Toute fonction $F^* \in \mathcal{O}(X^*)$ et toute 1-forme $\omega^* \in \Omega^1(X^*)$ sont les restrictions à X^* de fonctions $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N, 0)$ et 1-forme $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^N, 0)$

Malgrange: preuve formelle.

$$\begin{cases} \operatorname{cod} \operatorname{Sing} \omega \geq 3 \\ \omega \wedge d\omega = 0 \end{cases} \overset{\text{Saito}}{\Longrightarrow} d\omega = \omega \wedge \omega_1$$

Dériver: $\quad 0 = \omega \wedge d\omega_1 \Rightarrow d\omega_1 = \omega \wedge \omega_2$

etc:

$\exists \ldots \omega_k \ldots$ tq

$$d\omega_k = \omega_0 \wedge \omega_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} C_k^j \omega_j \wedge \omega_{k+1-j}$$

(Godbillon - Vey)

$\Rightarrow$ "Désingularisation"

$$\Omega = dt + \sum_1 \frac{t^n}{n!} \omega_n$$ est intégrable.

NON SINGULIÈRE $(\omega_0 = \omega)$

Mais formelle sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$

Frobenius ordinaire formel:

$$\Omega = \hat{G}(z,t)\, d\hat{F}(z,t)$$

$t=0$

$$\omega_0 = \hat{g}(z)\, d\hat{f}(z) \quad , \hat{f}(z) = \hat{F}(z,0)$$

Shéma de preuve du théorème

(1) $\mathcal{F}^*$ feuilletage sur X^* est défini par $\omega^* \in \Omega^1(X^*)$

(2) ω^* = restriction de $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^N, 0)$ à X^* ; ω intégrable sur X

(3) On peut construire une suite de Godbillon Vey

$\omega_n^* \in \Omega^1(X^*_{,0})$

(car $H^1(X^*, \mathcal{O}) = 0$)

ω_n^* = restriction de $\omega_n \in \Omega^1(\mathbb{C}^N, 0)$

à X^*

5 La 1-forme (formelle)

$$\Omega = dt + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\,\omega_n \quad , \; \omega_0 = \omega$$

est intégrable en restriction à

$X \times \widehat{\mathbb{C},0}$
$(x, \; t)$

et définit sur $X \times \mathbb{C},0$

un feuilletage $\mathcal{G}$ formel de cod 1

dont la restriction à $X \times \{0\}$

est le feuilletage holomorphe initial $\mathcal{F}$.

6 soit $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^N_{,0} \longrightarrow \mathbb{C}^N$

une désingularisation de X.

$\underline{\tilde{X}}$ = transformé strict de X

$\underline{D}$ = diviseur exceptionnel de

$$\pi|_{\tilde{X}} : \tilde{X} \longrightarrow X.$$

$$\underline{\tilde{X}'} = \tilde{X} \times \mathbb{C}$$

$$\underline{D'} = D \times \mathbb{C}$$

$$\pi' = \pi \times id_{\mathbb{C}}$$

Remarque technique :

$\pi^* \omega_n$ laisse D invariant

$(i_D^* \pi^* \omega_n \equiv 0 , \forall n)$

7) $\Pi'^{*}\Omega = dt + \sum \frac{t^i}{i!} \Pi^{*}\omega_i$

définit un feuilletage formel $\tilde{\mathcal{G}}'$

<u>sans singularités</u> le long de

$D' = D \times \mathbb{C},0$ dans $\tilde{X}' = \tilde{X} \times \mathbb{C},0$

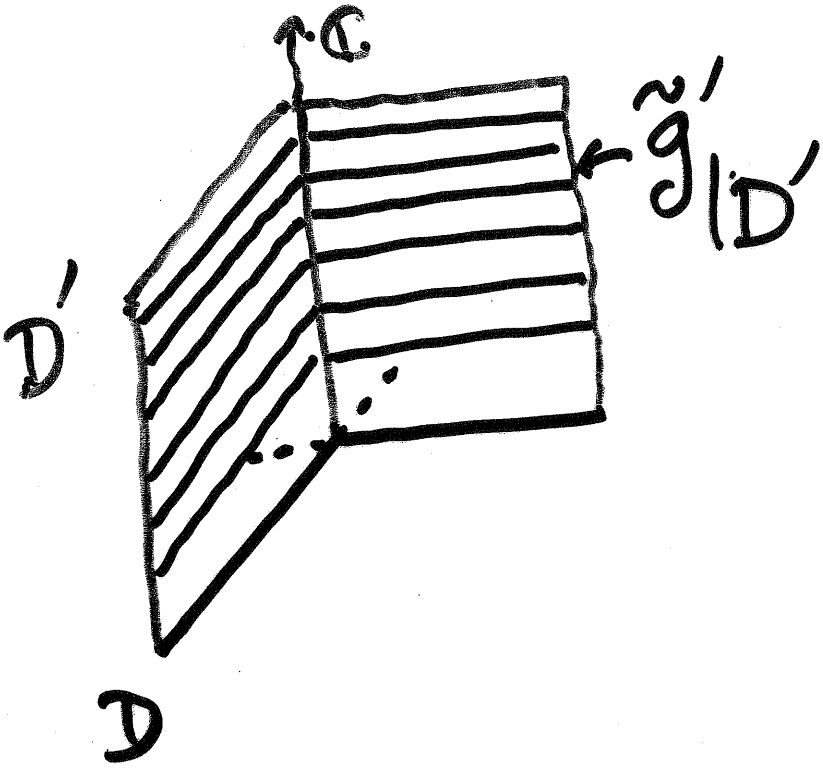
8) Supposons <u>Ω convergente</u> dans un 1er temps.

En restriction à D' on a :

$$\Pi'^{*}\Omega_{|D'} = dt$$

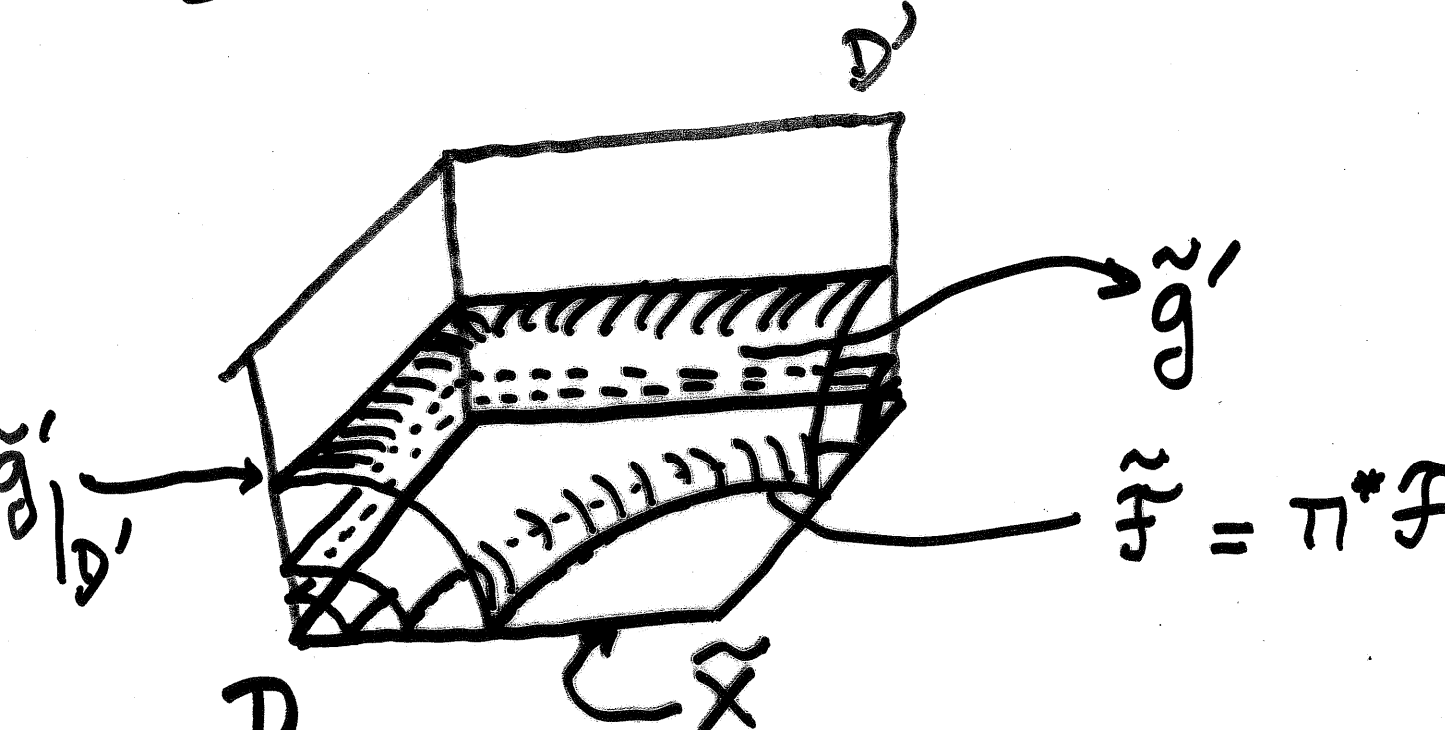
Les feuilles de $\tilde{\mathcal{G}}'_{|D'}$ sont les diviseurs connexes

$$D \times \{t\} \subset D'$$



C
$\tilde{g}'_{|D'}$
D'
D

: $t = \text{cste}$



D'
$\tilde{g}'$
$\tilde{g}'_{|D'}$
$\tilde{\mathcal{F}} = \pi^* \mathcal{F}$
$\tilde{X}$
D

En chaque point $m \in D'$
on peut étendre de façon unique
l'intégrale première t de $\tilde{g}'_{|D'}$
en une intégrale première locale
de $\tilde{g}'$. Unicité $\Longrightarrow$ recollement :

Construction intégrale $1^{ère}$ globale

$$\underline{\tilde{F}' \in \mathcal{O}(\tilde{X}')}$$

de $\tilde{g}'$, $\qquad \tilde{F}'_{|D'} = t$.

(9) Idem si Ω formelle
("en t"),

Ici $\tilde{F}'$ formelle le long de
D'.

10 <u>la Restriction de $\tilde{F}'$</u> à

$t=0$. produit une intégrale première formelle $\underline{\tilde{f}}$ de $\pi^* \mathcal{F}$ sur $\underline{\tilde{X}}$ le long de D.

Rq : par construction

$$\pi'^* \Omega = G' dF' \quad G' \text{ UNITÉ}$$

$$t=0 \Longrightarrow$$

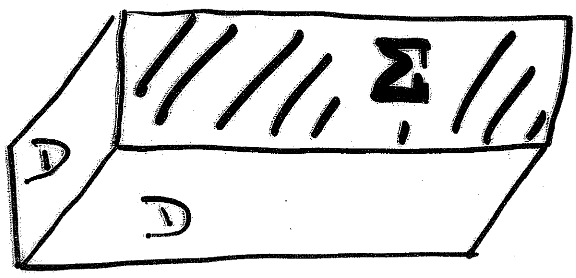
$$\underline{\pi^* \omega = \tilde{g}\, d\tilde{f}}$$

Rq: par construction

$$D \subset (\tilde{f}=0)$$

$\boxed{\underline{\text{Lemme technique}} : \quad D \underset{\neq}{\subset} (\tilde{f}=0)}$

(vrai en holomorphe)



$$\Sigma_1 = \text{"}\overline{(\tilde{f}=0) - D}\text{"}$$

en $m \in \Sigma \cap D$:

$$\begin{cases} \tilde{X}_{,m} \text{ est lisse} \\ \pi^* \mathcal{F} \text{ a une I.P formelle.} \end{cases}$$

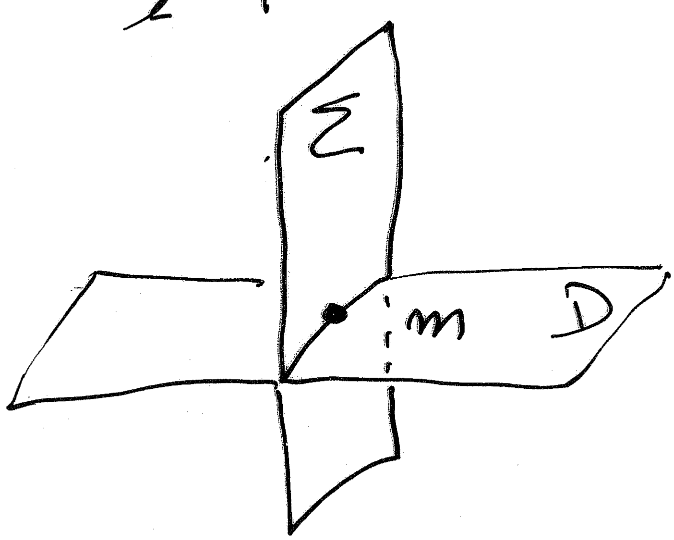
Malg. $\Rightarrow$ $\underline{\pi^* \mathcal{F}_{,m} \text{ a une I.P convergente}}$

$\Rightarrow$ $\underline{\Sigma_{,m} \text{ est holomorphe}}$ $\Rightarrow$ $\underline{\Sigma_1 \text{ holomorphe}}$

On peut supposer $D \cup \Sigma_i$ désingularisée quitte à modifier $\tilde{X}$.

Rq: $\pi^* \omega = \tilde{g}\, d\tilde{f}$

$\Rightarrow$ $\tilde{f}$ est de multiplicité 1 le long de Σ_i (sinon on crée des singularités de $\pi^*\omega$ le long de Σ) qui est une hypersurface



m point générique de $\Sigma \cap D$.

$$\tilde{f}_{,m} = x\, y^p$$

$$(x=0) = \Sigma, m$$

$$(y=0) = D, m$$

x, y coordonnées formelles.

$\boxed{\tilde{f}_{,m} \text{ est minimale}}$

Mattei–Moussu–Malgrange

$\Rightarrow \exists$ série formelle ℓ telle

que $(\ell \circ \tilde{f})_{,m}$ converge

$\ell \circ \tilde{f}$ définit une I.P formelle globale.

<ins>Propagation de la convergence.</ins>

par connexité de D.

Rq : on a dans la preuve utilisé le th de Malgrange. Ce n'est pas nécessaire. La preuve contient de facto Frob. sing. de Malgrange

En fait j'utilise

Mattei-Mousson.

I.P formelle $\xRightarrow{\text{faible}}$

I.P convergente page 13