

# Modelli variazionali per la propagazione quasi-statica delle fratture in materiali quasi-fragili. Un'applicazione al degrado del Panthéon Francese a Parigi\*

Gianni Royer Carfagni

Dipartimento di Ingegneria Civile, dell'Ambiente, del territorio e Architettura, Università di Parma  
Parco Area delle Scienze 181/A, 43100 Parma, Italia

Le superfici di frattura presenti nella muratura in pietra da taglio del Panthéon Francese a Parigi sono così particolari e ripetitive da poter essere considerate sintomi di una particolare forma di degrado. I difetti principali sono stati osservati in due tipi di elementi: nei conci che formano le volte e le cupole dell'edificio, originariamente rinforzati da grappe in ferro (agrafes) e nei quattro piloni che sorreggono la cupola principale. Il danneggiamento dei conci delle cupole è ricollegabile agli sforzi di contatto con le grappe metalliche, ma è tuttora oggetto di discussione se tali sforzi siano provocati dall'espansione del ferro per ossidazione, oppure dal tiro delle grappe stesse, messe in tensione in quanto elementi di cerchiatura per le cupole. Le crepe nei piloni sono state invece storicamente attribuite alle concentrazioni di tensione trasmesse da cunei in legno duro di quercia, inseriti come distanziatori nei commenti di malta per regolarizzarne lo spessore. Per interpretare percorsi di frattura così caratteristici, viene proposto un modello variazionale per lo propagazione quasistatica ed irreversibile delle fessure, che vengono associate ai minimi di un funzionale energia la cui espressione, sotto molti aspetti, è analoga a quello originariamente proposto da Bourdin Francfort e Marigo [*J. Mech. Phys. Solids*, **48**, 2000], ma con sostanziali differenze.

Innanzitutto, va osservato che B.F.M. hanno proposto il proprio modello come approssimazione, con fini di soluzione numerica, del modello di frattura alla Griffith. Il funzionale energia approssimante dipende da un parametro  $\varepsilon$  e si dimostra, estendendo al caso della meccanica della frattura il risultato di Ambrosio e Tortorelli [Comm. Pure Appl. Math., **XLIII**, 1990], che per  $\varepsilon \rightarrow 0$  questo  $\Gamma$ -converge al funzionale di Griffith. Qui, viene invece evidenziato il significato fisico dei vari parametri che caratterizzano il  $\Gamma$ -approssimante, ed in particolare viene riconosciuto il ruolo del parametro  $\varepsilon$ , che può essere interpretato come la lunghezza intrinseca associata ad un mezzo quasi fragile. In questa interpretazione, il funzionale approssimante risulta ben più di un mero escamotage numerico, ma assume il ruolo di vero e proprio modello autonomo di danneggiamento per materiali quasi-fragili, con una rilevanza forse più interessante del semplice modello di Griffith.

In secondo luogo, il funzionale qui proposto si differenzia da quello di B.F.M. per la scelta dell'espressione della parte di bulk dell'energia, che si fa ora dipendere dalla sola componente deviatorica dello strain. In tal modo, si vuole cercare di riprodurre la formazione di bande di taglio che, seguendo il criterio di crisi locale di von Mises, si uniscano in fratture dominanti che si aprono in modo II.

Si presentano esperimenti numerici per tre casi paradigmatici: l'espansione delle grappe (per l'ossidazione del ferro), il tiro delle grappe, o il contatto dei cunei in legno. Una volta inseriti opportuni parametri che descrivono le proprietà meccaniche del materiale lapideo, in particolare la sua energia di frattura e la lunghezza intrinseca  $\varepsilon$  del materiale, questo studio porta alle conclusioni seguenti. Il tiro delle grappe è associato ad un percorso di frattura sorprendentemente simile a quello osservato *in situ*. Anche l'espansione per ossidazione del ferro potrebbe provocare la rottura della pietra, ma il corrispondente schema di fessurazione non quadra con quanto rilevabile nell'edificio. Infine, l'analisi quantitativa degli effetti della pressione localizzata dei cunei di legno indica che tale effetto avrebbe potuto facilmente danneggiare i pilastri, anche molto prima del completamento della cupola (così come in effetti è stato documentato storicamente). Il confronto con i risultati ottenibili con il modello originale di B.F.M. evidenzia come, nel meccanismo di degrado del Panthéon, sia fondamentale il ruolo svolto dalle deformazioni a taglio.

\* Questo studio è stato svolto nell'ambito di uno programma di ricerca più generale, commissionato all'Università di Parma dal Ministero Francese della Cultura e della Comunicazione.