

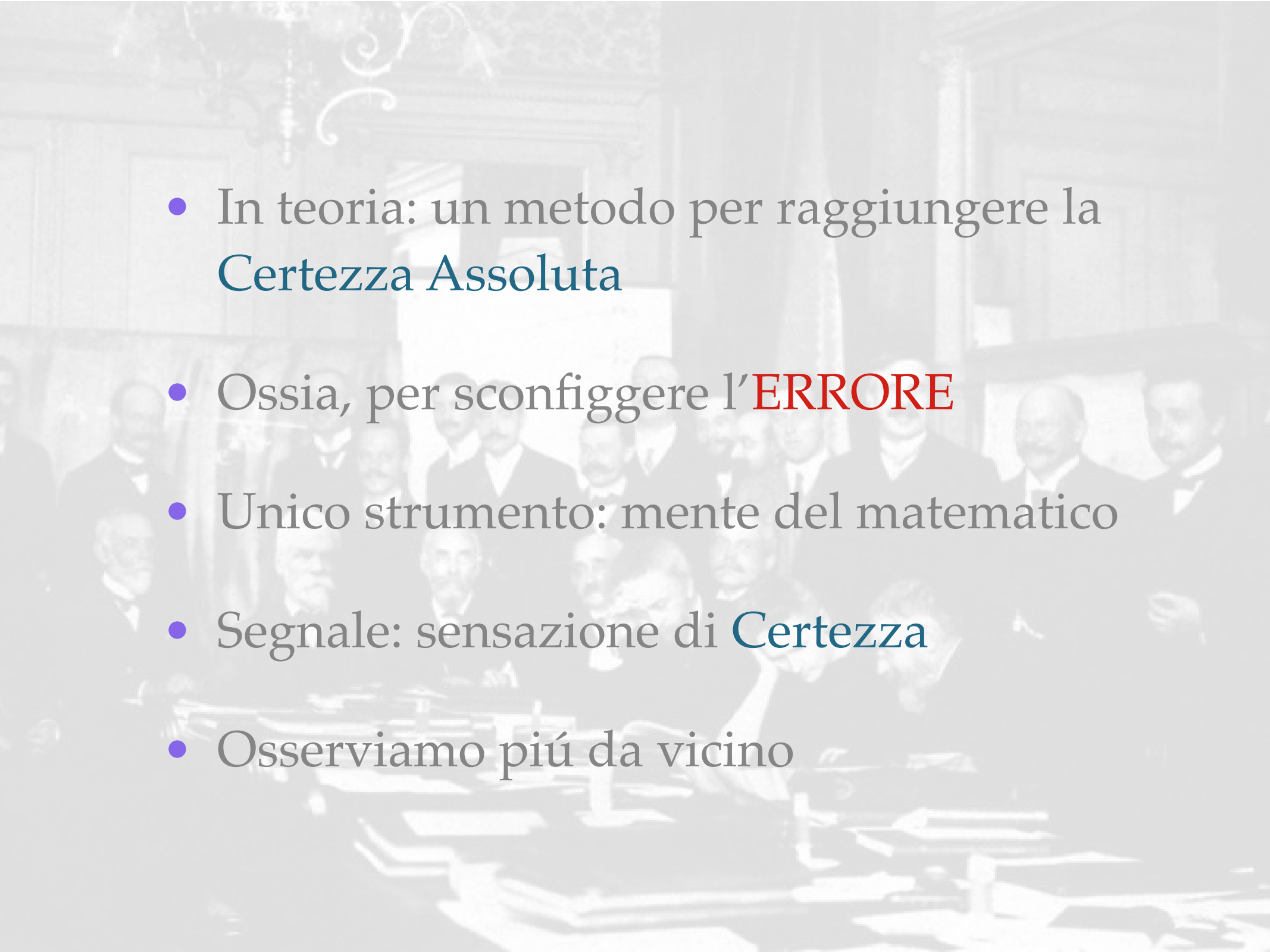
Il ragionevole dubbio

Piero D'Ancona

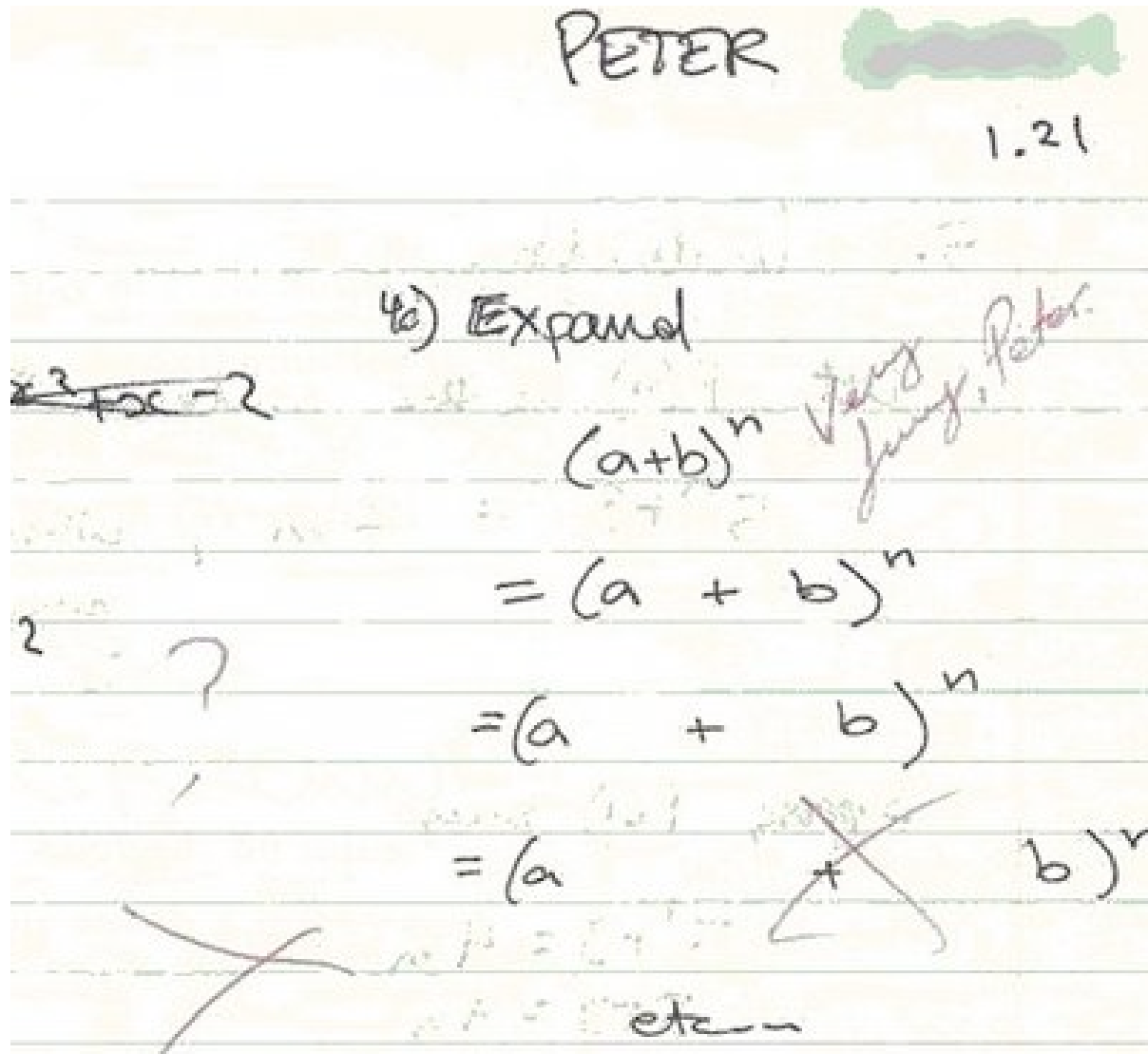
Sapienza - Università di Roma

1 Introduzione

- Art. 533 C.P.P. (modif. 12/1/2006):
l'imputato può essere condannato solo se
la sua colpevolezza sia provata
“al di là di ogni ragionevole dubbio”
- Il metodo scientifico assomiglia ad un
processo penale...
- ...specialmente in matematica

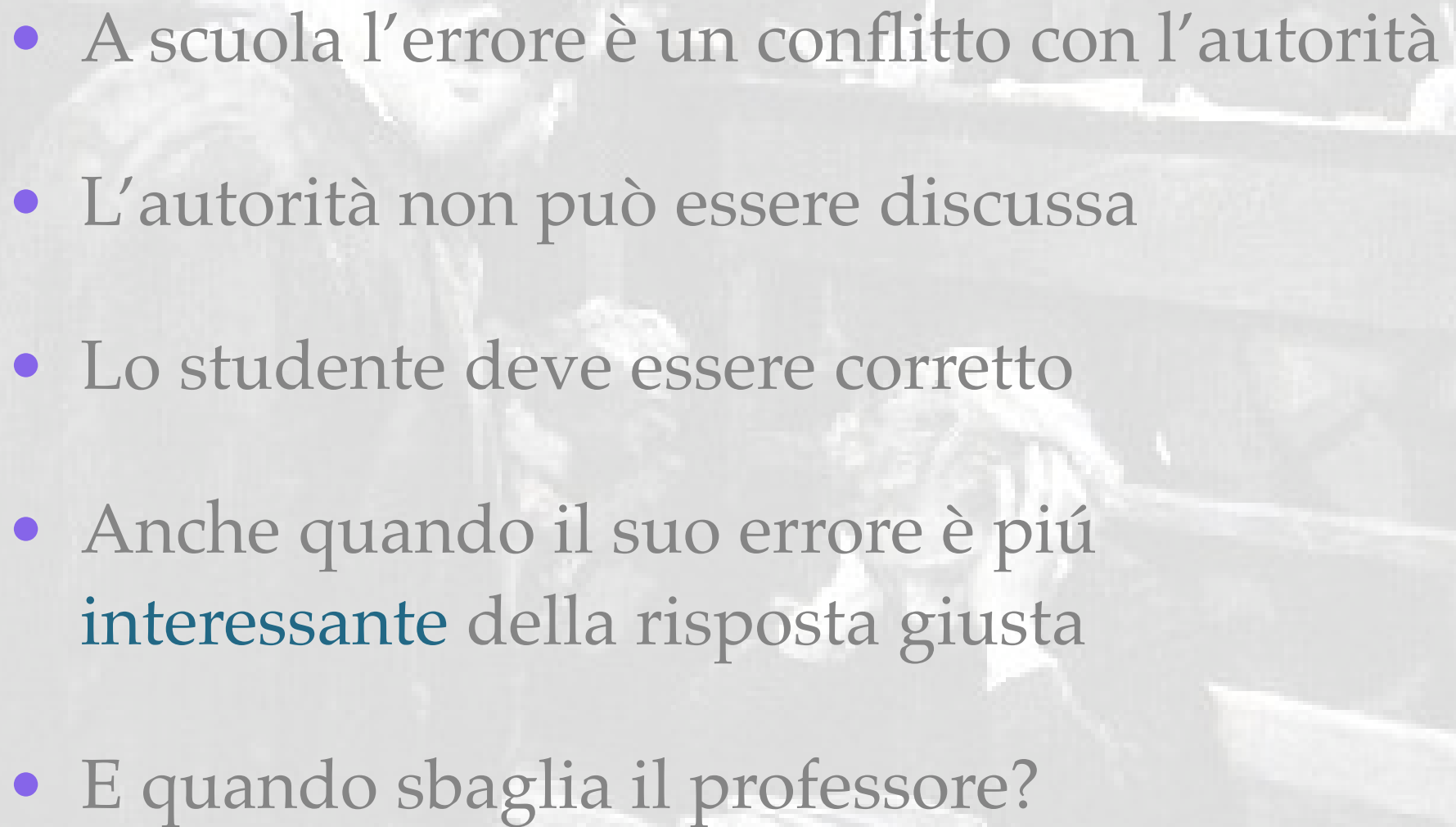
- 
- In teoria: un metodo per raggiungere la **Certezza Assoluta**
 - Ossia, per sconfiggere l'**ERRORE**
 - Unico strumento: mente del matematico
 - Segnale: sensazione di **Certezza**
 - Osserviamo piú da vicino

2 L'errore scolastico



Non
confondiamo
l'errore dello
scienziato
con l'errore
dello
studente

...

- 
- A scuola l'errore è un conflitto con l'autorità
 - L'autorità non può essere discussa
 - Lo studente deve essere corretto
 - Anche quando il suo errore è più **interessante** della risposta giusta
 - E quando sbaglia il professore?

3 La versione ufficiale

- Metodo matematico porta alla **certezza**
- Molto piú antico del metodo sperimentale: **Antica Grecia** (almeno)
- Lo stile non è cambiato: Teorema, Dimostrazione... Euclide
- Attacco all'errore: processo che avviene dentro la testa del matematico



FASI del PROCESSO

1. Stato di certezza indisturbata
2. Scoperta dell'errore: **tragedia**
3. Autocritica: l'errore è **dentro di me**
4. L'errore sparisce, la verità **trionfa**



- In fisica, ad esempio, il processo è diverso
- L'errore sta **a metà strada** fra scienziato e natura
- Una teoria non funziona: se ne prova una nuova
- Nessuna teoria è vera al 100%
- Teorie contraddittorie **coesistono**

- In matematica manca il termine di riferimento (la natura)
- Tutto si basa sulla **sensazione di certezza** del matematico (il cervello)
- Ci possiamo fidare?

L. Wittgenstein (On Certainty, 1950)

Sono “sicuro” di avere un
cervello.

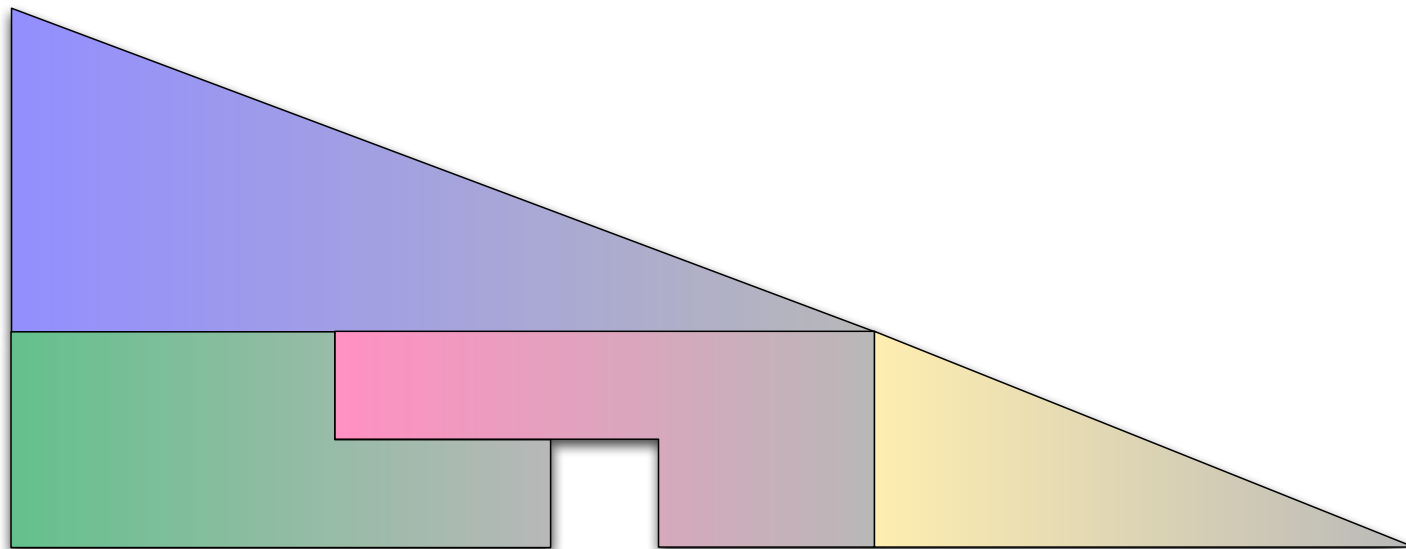
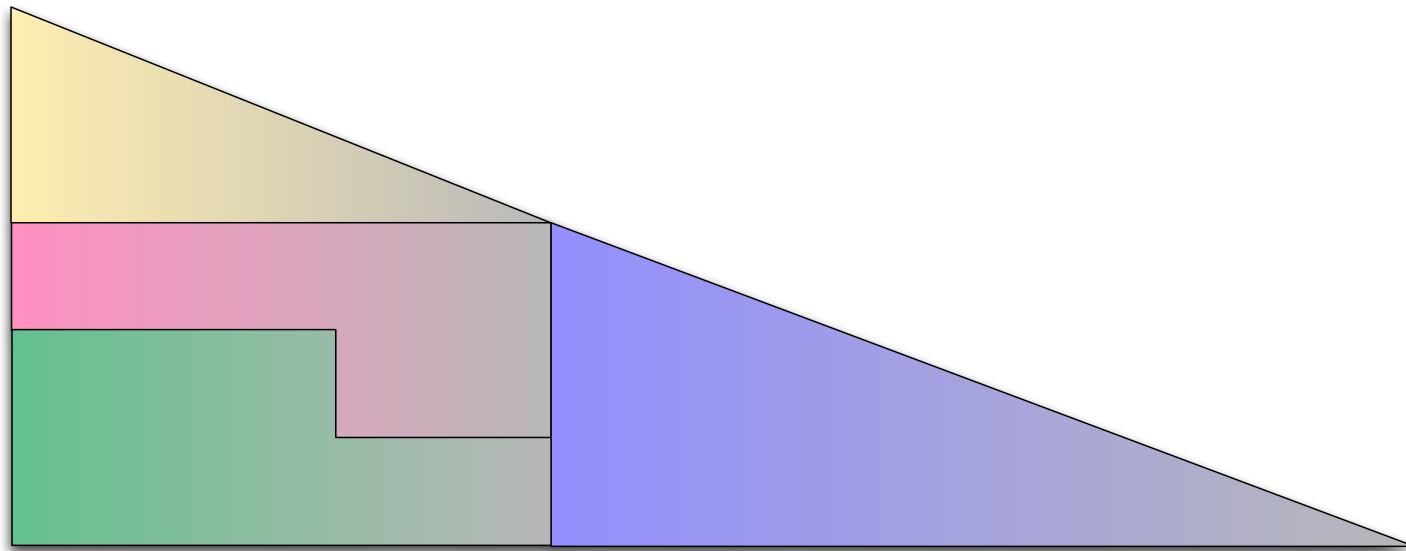
Come faccio a saperlo?



4 L'errore rassicurante

- La forma piú innocua di errore (paradosso)
- Si può **correggere**: l'errore **sparisce**
- L'errore “stava” nella percezione inadeguata del problema
- In un certo senso, il paradigma della ricerca matematica

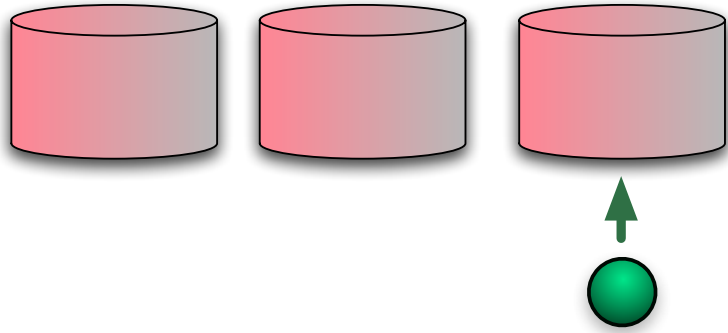
Dov'è l'errore?



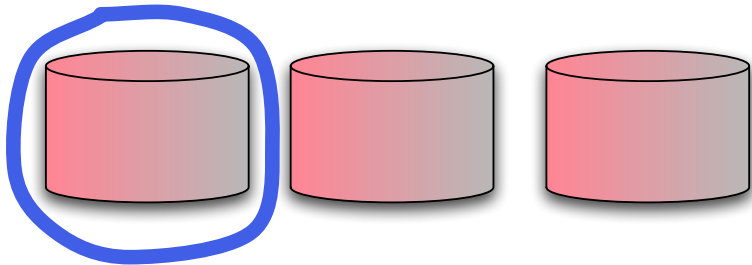
- La soluzione di questo tipo di errore fa progredire la matematica
- Moltissimi esempi storici
- $+1-1+1-1+1-1\dots = ?$
- Steiner e il problema isoperimetrico
- Problema di Dirichlet: la soluzione di Riemann e quella di Weierstrass

- La probabilità è un terreno fertile per l'errore
- Difficoltà del cervello a valutare lo “spazio degli eventi”
- Esempio: il problema di Monty Hall

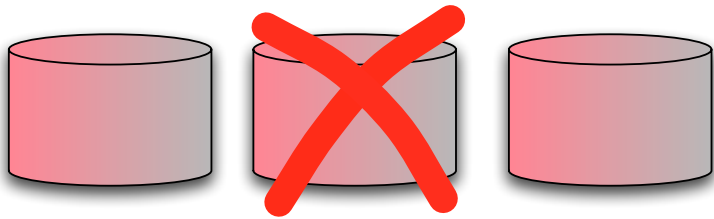




Tre scatole; solo una
contiene un premio



Il concorrente ne
sceglie una a caso...



...e il presentatore apre
una scatola vuota fra le
altre due

A questo punto il concorrente può cambiare scatola, se vuole.

Gli conviene?

Tre ragionamenti

- Ogni scatola ha probabilità $1/3$ di essere quella buona. L'apertura di una scatola non cambia nulla.
- All'inizio ho una probabilità su tre di vincere, e se non cambio resta la stessa. Ora ci sono solo due scatole e se scegliessi a caso adesso avrei probabilità $1/2$ di vincere. Mi conviene cambiare così la mia probabilità sale a $1/2$.
- La scatola scelta all'inizio è vuota 2 volte su 3. Adesso, la scatola ancora chiusa è vuota solo 1 volta su 3, e cioè se io avevo scelto quella buona. Mi conviene cambiare così la mia probabilità sale a $2/3$!

Qual è quello **giusto**?

- “Sperimentalmente” (e rigorosamente) il terzo ragionamento è corretto
- Difficoltà del cervello a visualizzare la totalità dei casi favorevoli / sfavorevoli
- Provate ad applicare lo stesso ragionamento ai pacchi di RaiUno...

5 L'errore destabilizzante

- Non tutti gli errori si **risolvono**
- Paradossi logici che mostrano i limiti delle nostre tecniche
- Molti esempi classici

Il paradosso del mentitore (Epimenide, Russell...)

Il proprietario di un ponte fa dire e giurare a chi passa per quale motivo vuol passare. I mentitori vengono impiccati su due piedi. Un giorno arriva un uomo che dichiara: "Sono venuto per farmi impiccare da voi!"

"Si a este hombre le dejamos pasar libremente, mintió en su juramento, y, conforme a la ley, debe morir; y si le ahorcamos, él juró que iba a morir en aquella horca, y, habiendo jurado verdad, por la misma ley debe ser libre" (Don Quijote II-51)

- Non c'è errore!
- Se ammettiamo frasi che parlano di sé stesse rischiamo l'assurdo
- Il problema sta nei metodi di ragionamento
- Con qualche cautela il problema è risolto
- Ma c'è di peggio...

Il paradosso del compito a sorpresa

Il professore dichiara: la prossima settimana faremo un compito in classe a sorpresa.

Un ragazzo gli risponde: sabato non può essere perché non sarebbe una sorpresa; venerdì non può essere, visto che abbiamo escluso sabato e arrivati a venerdì non sarebbe più una sorpresa; eccetera.

Ma il mercoledì seguente.....

Il paradosso non è stato chiarito in modo univoco
(vasta letteratura, a partire da Quine 1953)

Vero o falso?

Alice ha un amante e suo marito Bob non sa nulla. Un giorno Alice scrive una lettera al suo amante: "Non preoccuparti Charles, Bob non sa niente della nostra storia!"

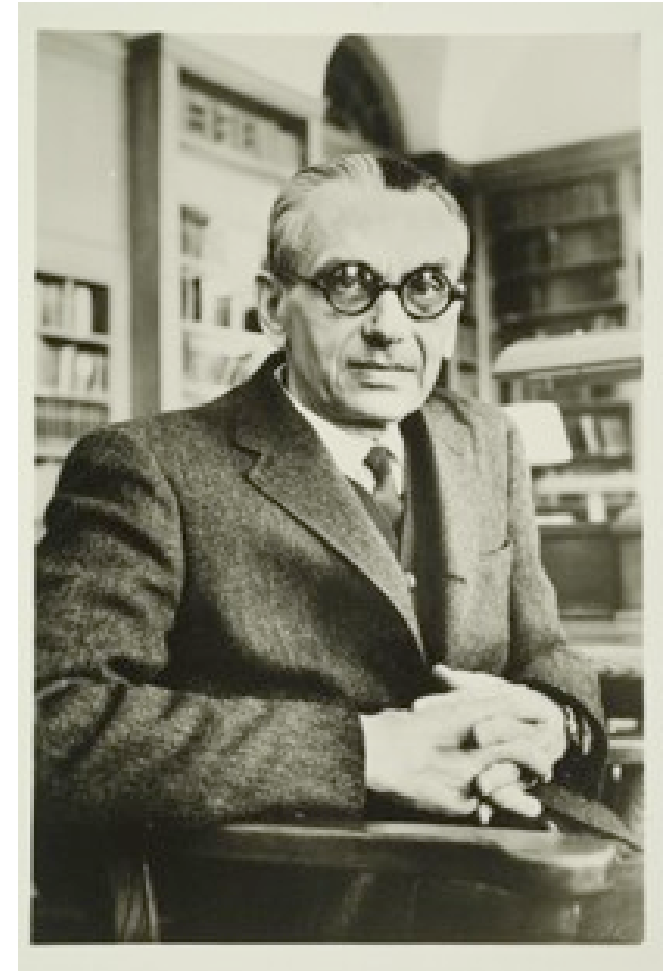
Bob intercetta la lettera e la legge.

La frase scritta nella lettera è vera o falsa? Se Bob ci crede è falsa, se non ci crede è vera...

- Paradossi che aprono falle nel metodo (Russell)
- No all'uso innocente del linguaggio
- La sensazione di certezza si rivela fallace

6 L'errore nei fondamenti

- 1931: Gödel dimostra l'**incompletezza** della matematica (aritmetica)
- Teoremi che non possiamo dimostrare né possiamo falsificare...
- ...quindi sono **verità indecidibili**
- Il palazzo ha delle crepe



- Il matematico professionista considera questo tipo di problemi “artificiale”, ma...
- Di Biase, Stokolos, Svennson, Weiss 2006: la congettura di Rudin (strong sharpness statement) è **indecidibile**
- Possiamo dire che il problema è **risolto**?
- Le crepe si fanno piú vicine

7 La verità matematica

- Basata sulla sensazione di certezza
- Ma: un risultato è **vero** quando la comunità degli scienziati decide che è vero
- Metodo: il **Peer Review** (referaggio)
- Uno o più **referee anonimi** decidono per tutta la comunità
- Verità matematica come fenomeno **sociale**



Un controllo "esterno" è indispensabile: molti gli esempi negativi



Il caso Castelnuovo - Enriques
- Severi (secondo Mumford)

- Per non parlare dei teoremi ritenuti “veri” dalla comunità ma capiti da nessuno (hard Lefschetz)
- Tuttavia il Peer Review resta il metodo piú efficace disponibile (fino ad oggi)

Difetti tradizionali del metodo

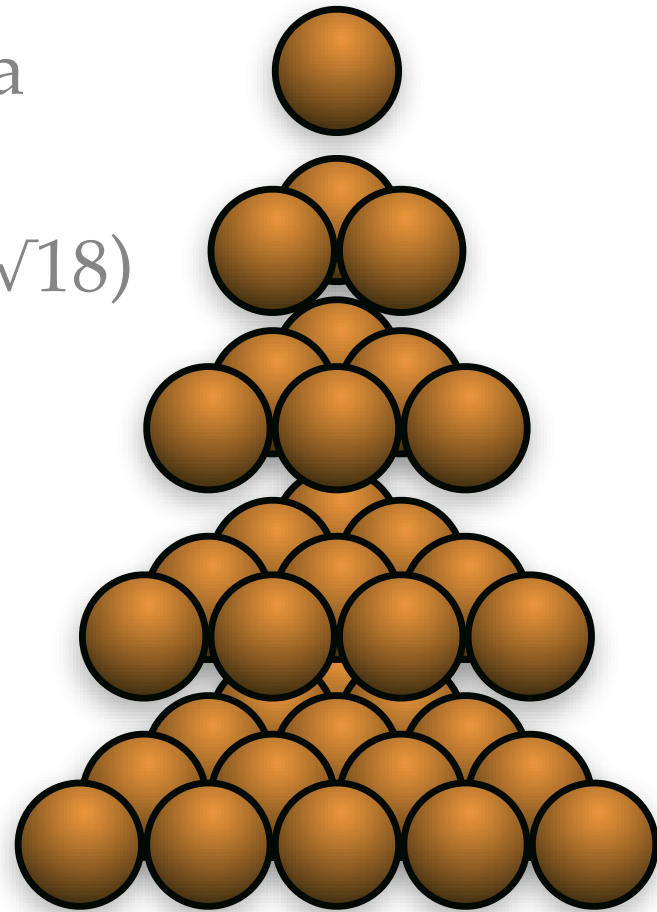
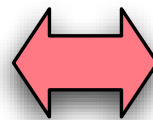
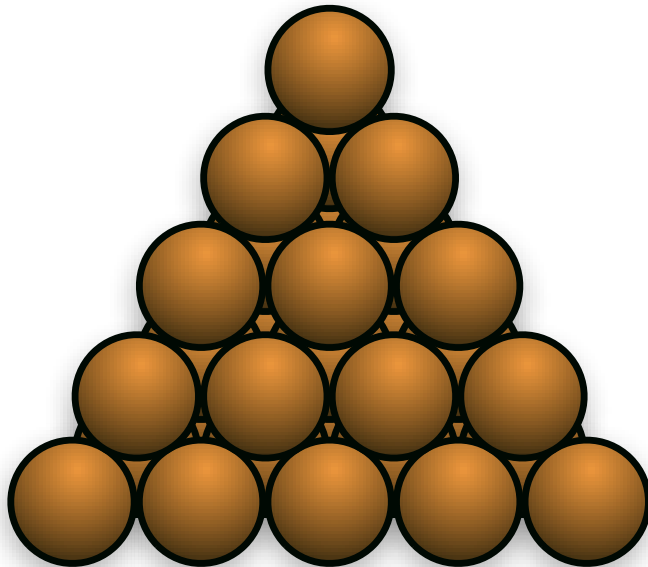
- Lentezza (anni)
- A volte usato per sopprimere il “dissenso” dalle opinioni dominanti
- L’anonimato espone a gelosie, personalismi e favoritismi di scuola

I nuovi problemi

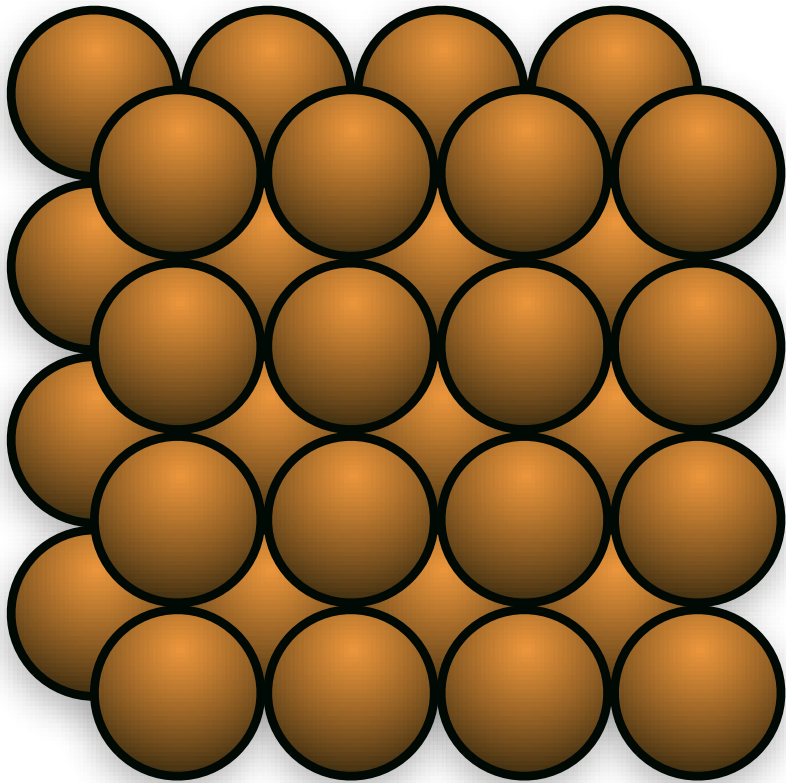
- Complessità crescente delle dimostrazioni
- Come valutare l'uso di software (e deve essere open source)?
- Il problema del copyright

La congettura di Keplero (o Hilbert XVIII)

- Qual è il modo piú denso di impacchettare delle sfere nello spazio?
- **Keplero 1611**: è lo schema esagonale (“piramide di palle di cannone”, $d = \pi / \sqrt{18}$)



- Lo schema cubico dà la stessa densità



- Nel 1997 Thomas Hales propone una dimostrazione (250 pagine)
- Divisione in moltissimi casi controllati con l'aiuto del computer
- Gli *Annals of Mathematics* chiedono a 12 referee di valutare il risultato
- Nel 2004 i referee si arrendono...



- Il lavoro è stato pubblicato nel 2005 con la dicitura “corretto al 99 %” ...
- Cosa ne è del metodo e della **verità matematica**?
- Gli *Annals* hanno modificato le regole: le dimostrazioni computer-assisted sono accettate ma di serie B

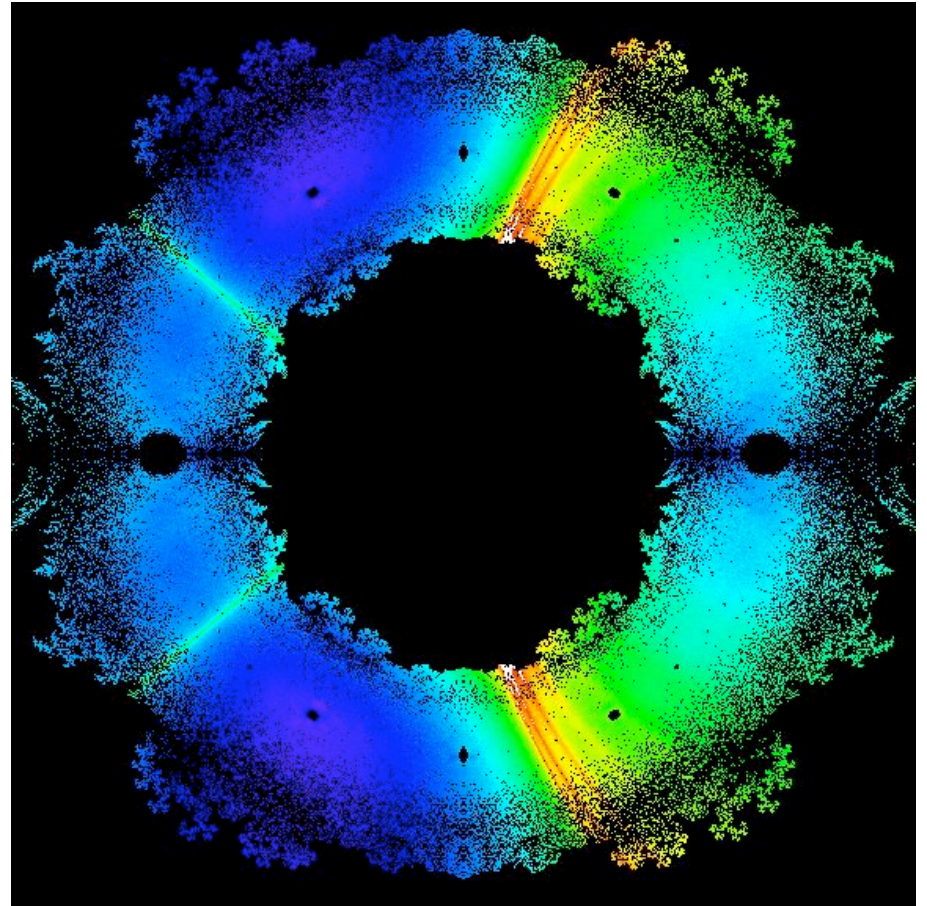
8 Il futuro

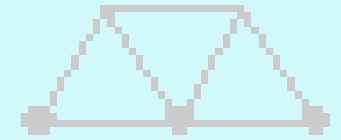
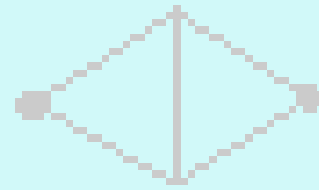
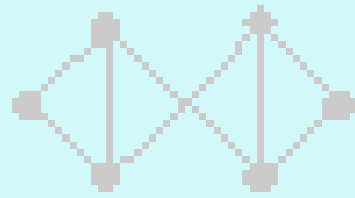
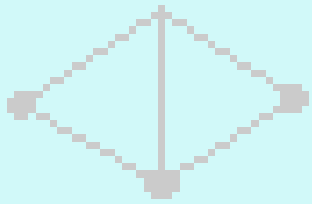
- Come andare oltre
- Esperimento riuscito: arXiv
- Risolve alcuni problemi: copyright, diffusione risultati
- Ma il referaggio?

- Un'idea interessante: il **referaggio distribuito**
- Dopo la “pubblicazione” su arXiv gli utenti valutano i lavori
- I giudizi non hanno tutti lo stesso peso
- Per il momento qualità molto scarsa (Naboj - Philica)

- Altra strada: **verifica automatica della dimostrazione**. Molti esperimenti
- Il progetto QED, il proof assistant COQ e il linguaggio Gallina, HOL, PhoX, Lego...
- Per ora siamo lontani dall'uso quotidiano (ma nel 2005 verificato il Teorema dei quattro colori)

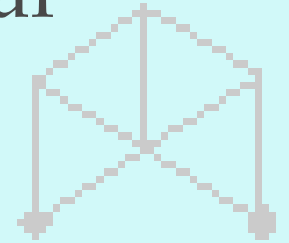
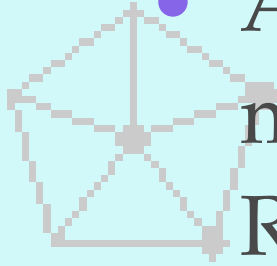
- Molti dubbi e poche risposte
- Possiamo fidarci del computer? (bug nei programmi, bug nell'hardware, approssimazione, errore umano...)
- Cittadinanza della **matematica sperimentale**



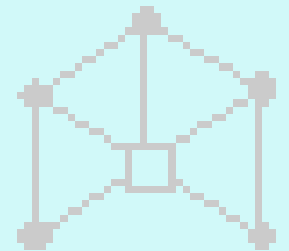
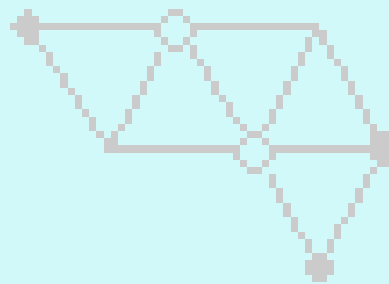
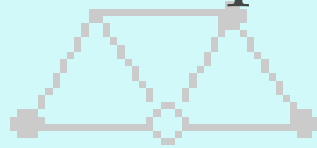
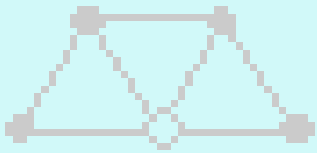


- Il concetto di **matematica sperimentale**

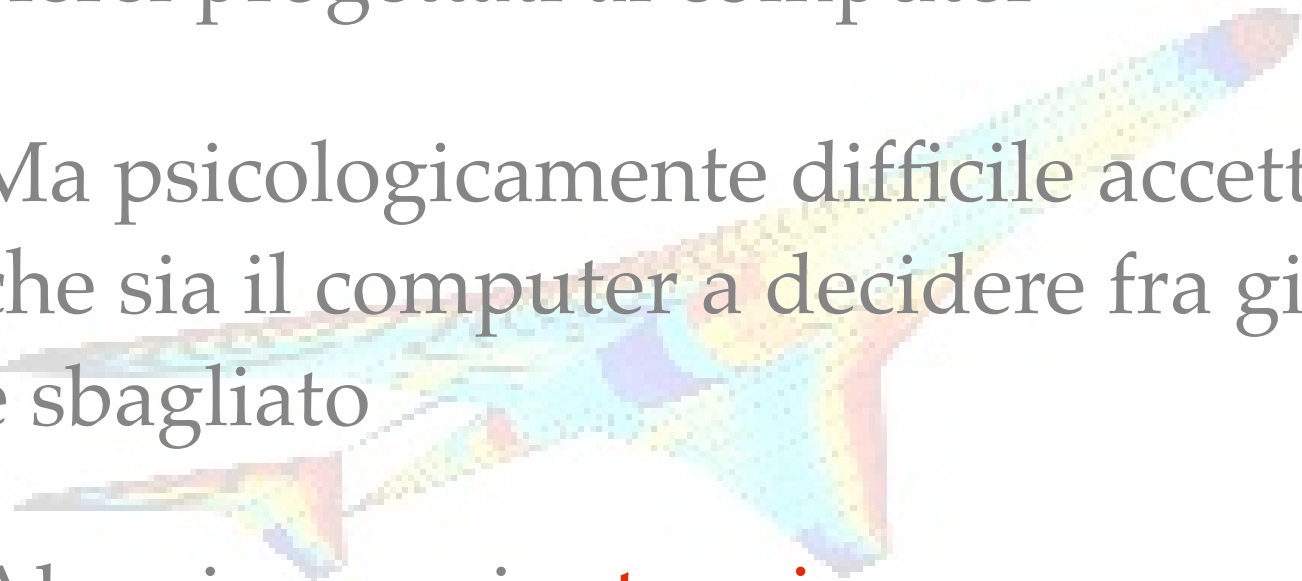
- Accettato “da sempre” come aiuto al metodo classico (fra le carte di Riemann...)

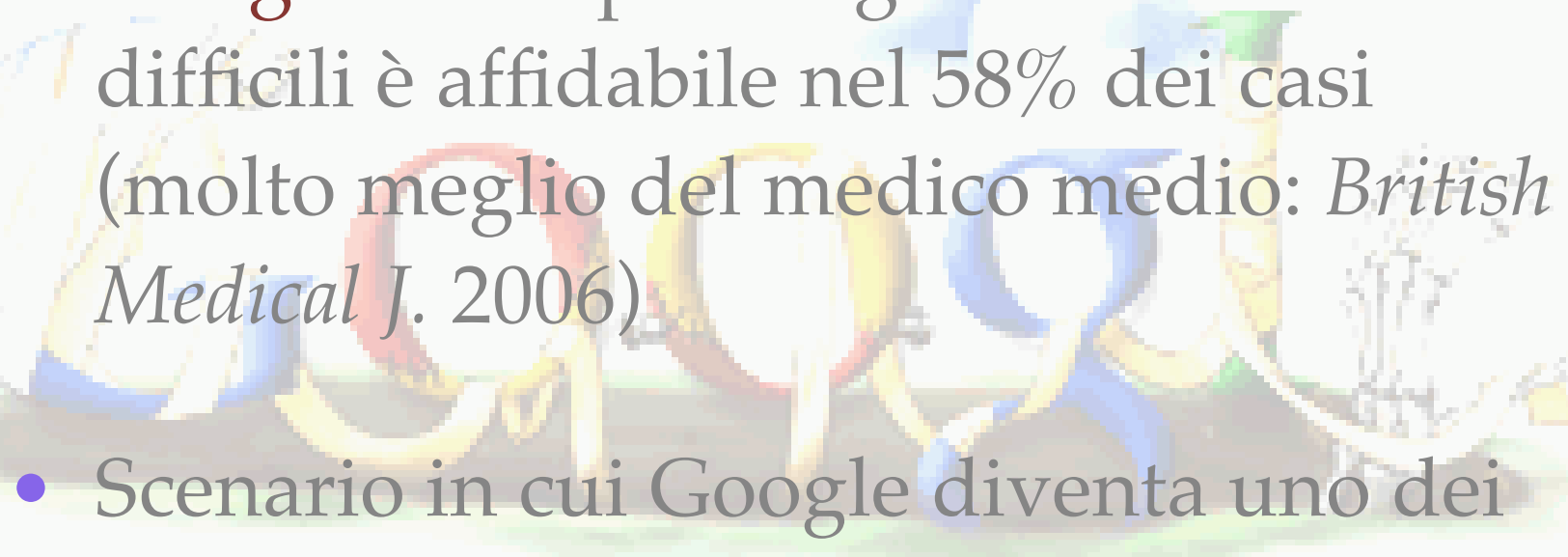


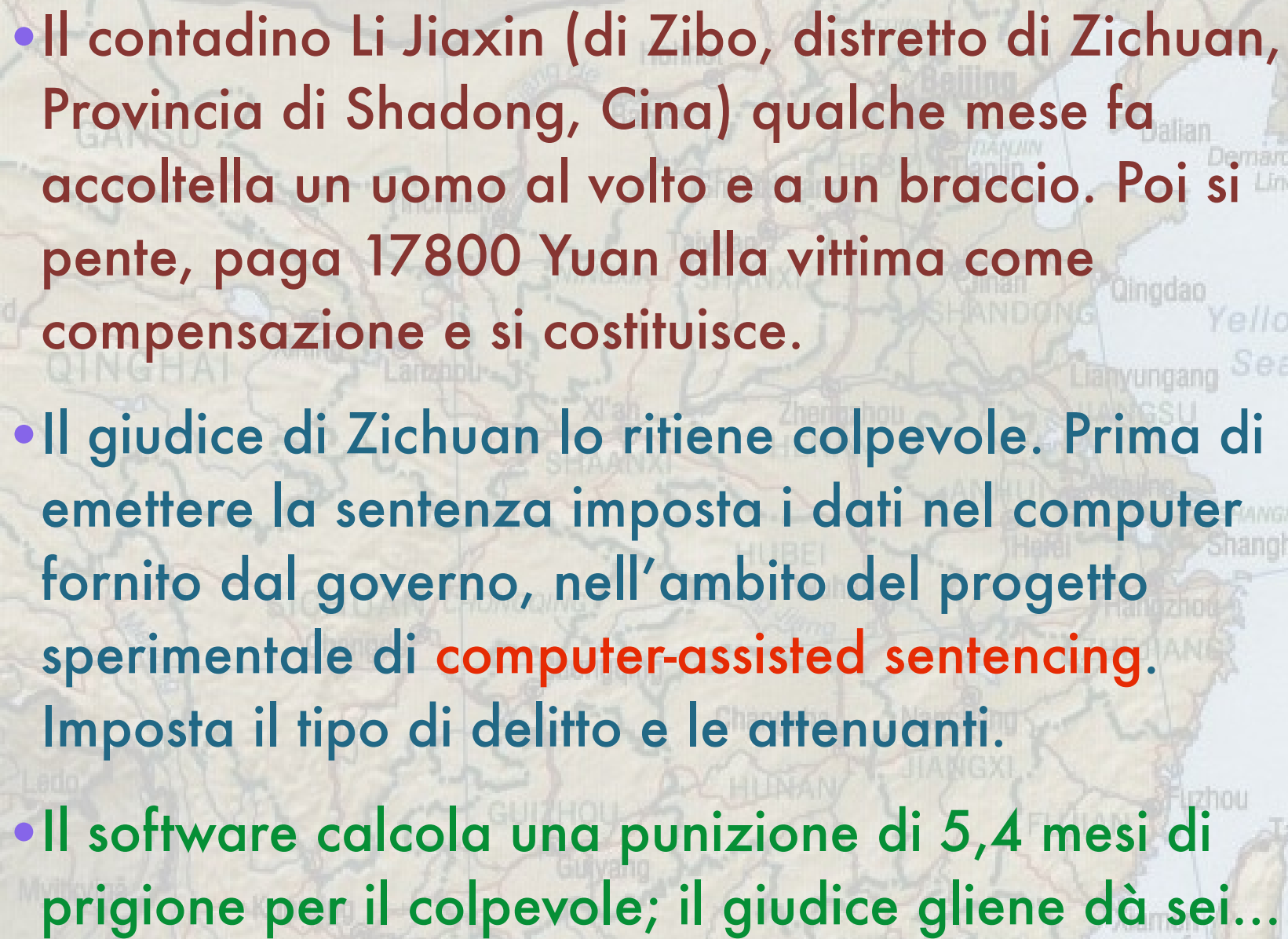
- Ma è in evoluzione: scoperta di nuovi fenomeni, “quasi” dimostrazione...



- Aerei progettati al computer
- Ma psicologicamente difficile accettare che sia il computer a decidere fra giusto e sbagliato
- Alcuni esempi **estremi**



- 
- **Google** usato per diagnosi mediche difficili è affidabile nel 58% dei casi (molto meglio del medico medio: *British Medical J.* 2006)
 - Scenario in cui Google diventa uno dei principali strumenti di diagnosi...

- 
- Il contadino Li Jiaxin (di Zibo, distretto di Zichuan, Provincia di Shandong, Cina) qualche mese fa accoltella un uomo al volto e a un braccio. Poi si pente, paga 17800 Yuan alla vittima come compensazione e si costituisce.
 - Il giudice di Zichuan lo ritiene colpevole. Prima di emettere la sentenza imposta i dati nel computer fornito dal governo, nell'ambito del progetto sperimentale di **computer-assisted sentencing**. Imposta il tipo di delitto e le attenuanti.
 - Il software calcola una punizione di 5,4 mesi di prigione per il colpevole; il giudice gliene dà sei...